UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/9/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0\}$ e $f : \ X \to X$ è lineare,
la f può avere gli autovalori $\ -7, \ \ 2\sqrt{2}, \ \ \sqrt[3]{\pi}$?

2. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 7x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 0\}$ e $f : \ X \to X$ ha i soli autovalori -19 e 13,
si può concludere che è diagonalizzabile oppure che non lo è?

3. Determinare il coseno dell'angolo formato in $\mathbb{R}^4$ dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} 5-t & t+1 \\ t+1 & 3t-1 \end{pmatrix}$ ha gli autovalori positivi.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $y^2 - xy - xz - yz + \frac{3}{2}(x-y) = 0$.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t-4 : t+1 : 4-2t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartiene
alla retta proiettiva passante per $[2:1:-3]$ e $[3:-5:1]$.

7. Calcolare $\int_\alpha y \, \mathrm{d}x$ con $\alpha : \ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/9/14 — Esercizî

1. Considerare $X = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$ e $A = \begin{pmatrix} -9 & -8 & 4 \\ 16 & 13 & -5 \\ 11 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su X, verificandone le proprietà caratterizzanti.

(B) (3 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A e i suoi autovalori con la loro molteplicità algebrica.

(C) (3 punti) Stabilire se A sia diagonalizzabile.

(D) (3 punti) Stabilire se l'applicazione lineare $f : X \to X$ data da $f(x) = 14 \cdot M \cdot A \cdot x$ sia diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s^2 + 2e^s \\ \cos(s) + s^3 - s \\ \frac{s}{s+1} \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Trovare il più grande intervallo I contenente 0 su cui α è definita.

(B) (2 punti) Provare che su I la α è semplice e regolare.

(C) (3 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α in $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α in $s = 0$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\beta xz(z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}z)$ dove β è la restrizione di α a $[1, 2]$.

Risposte

5. ♢

1. No, X ha dimensione 2 dunque f ha al massimo 2 autovalori distinti

2. Sì, X ha dimensione 2, dunque f avendo 2 autovalori distinti è diagonalizzabile

3. $-\frac{1}{15\sqrt{2}}$

4. $\frac{1}{2} < t < 3$

5. Iperboloide a una falda

6. $t = 7$

7. $-\pi$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$; si ha che M è simmetrica e $M \cdot M = M$

(B) $t^3 - 4t^2 - 3t + 18$; autovalori 3 con m.a. 2 e -2 con m.a. 1

(C) No perché m.g.$(3) = 1$

(D) Sì; rispetto alla base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ ha matrice $\begin{pmatrix} -24 & 69 \\ 64 & -16 \end{pmatrix}$, dunque ha polinomio caratteristico $t^2 + 40t + 4032$, che ha radici reali distinte

2.

(A) $I = (-1, +\infty)$

(B) La terza componente di α ha derivata positiva su I

(C) $t(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n(0) = \frac{1}{\sqrt{462}}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -19 \end{pmatrix}$, $b(0) = \frac{1}{\sqrt{77}}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(D) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{77}}{6\sqrt{6}}$, $\tau(0) = \frac{6}{7}$

(E) $\frac{8}{9}(e^2 + 2)^2 - \frac{1}{8}(2e + 1)^2$