Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 7/6/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ trovare $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -5$, che $\det(A) = 10$ e che $p_A(-1) = 0$.

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitarî e ortogonali sia a $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sia a $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} t^2 & t^2+6t+5 \\ t-1 & -t \end{pmatrix}$
ammette una base ortonormale di autovettori, e per quali di tali t gli autovalori sono positivi.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $5z^2 + 2xy - 2xz - 4yz - 2x + 2y = 0$.

6. Determinare i punti di intersezione del luogo $\{[-t : t-1 : t+1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\}$
con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $-5y^2 + z^2 + xy + 2xz + 9z + 2 = 0$.

7. Calcolare $\int_\alpha \frac{x\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{1+x^2-2y}$ con $\alpha :\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3+t \\ t^2-3t \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k^2+k-1 & k+1 & 1 \\ -k^2-3k+4 & 2 & k-1 \\ 3k^2+9k-10 & -3k-1 & 4-4k \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(A_k) = 2k^4 - 7k^3 + 5k^2 - 7k + 3$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_{A_k}(1) = 2k^3(2-k)$ trovare $p_{A_k}(t)$.

(C) (1 punto) Sapendo che A_k ha gli autovalori $\lambda_1 = 3-k$ e $\lambda_2 = 1-2k$, trovare il terzo λ_3.

(D) (2 punti) Al variare di k trovare le molteplicità algebriche dei λ_j.

(E) (4 punti) Al variare di k trovare le molteplicità geometriche dei λ_j, deducendone i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s - \ln(1+s^2) \\ 3s - \mathrm{e}^s \\ 2s^2 - \sin(s) \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Trovare il dominio di α.

(B) (2 punti) Provare che α è regolare sul suo dominio.

(C) (3 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α in $s=0$.

(D) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α in $s=0$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\beta (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. $t^3 + 5t^2 - 6t - 10$

2. $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 7,\ v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\pm\frac{1}{3\sqrt{129}}\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 32 \end{pmatrix}$

4. $t = -3$ e $t = -2$; $t = -3$

5. Iperboloide a due falde

6. $[-1 : 0 : 2]$ e $[4 : 3 : -11]$

7. $\ln 3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Sostituire la prima riga con sé stessa più la seconda e la terza con sé stessa più 3 volte la seconda, poi la prima colonna con sé stessa più 2 volte la terza e la seconda con sé stessa meno la terza, e infine la prima colonna con sé stessa meno la seconda; si trova k^2-1 volte il determinante di una matrice 2×2 per la quale si possono fare i conti

(B) $p_{A_k}(t)=t^3-(k^2-3k+5)t^2-(3k^3-6k^2+10k-7)t-(2k^4-7k^3+5k^2-7k+3)$

(C) $\lambda_3=k^2+1$

(D) Per k diverso da -2, 0 e 1 tutti i λ_j hanno m.a. 1;
per $k=-2$ si ha $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=5$ con m.a. 3
per $k=0$ si ha $\lambda_2=\lambda_3=1$ con m.a. 2 e $\lambda_1=3$ con m.a. 1;
per $k=1$ si ha $\lambda_1=\lambda_3=2$ con m.a. 2 e $\lambda_2=-1$ con m.a. 2;

(E) Per k diverso da -2, 0 e 1 tutti i λ_j hanno m.g. 1, dunque A_k è diagonalizzabile;
per $k=-2$ si ha m.g.$(5)=1$, dunque A_k non è diagonalizzabile;
per $k=0$ si ha m.g.$(1)=1$ e m.g.$(3)=1$, dunque A_k non è diagonalizzabile;
per $k=1$ si ha m.g.$(2)=2$ e m.g.$(-1)=1$, dunque A_k è diagonalizzabile

2.

(A) $\mathbb{R}$

(B) La prima componente di $a'(s)$ si annulla solo in $s=1$, e la seconda solo in $s=\ln(3)$

(C) $t(0)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $n(0)=\frac{1}{\sqrt{93}}\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}$, $b(0)=\frac{1}{\sqrt{62}}\begin{pmatrix}7\\-2\\3\end{pmatrix}$

(D) $\kappa(0)=\frac{\sqrt{31}}{6\sqrt{3}}$, $\tau(0)=\frac{5}{62}$

(E) $(3-e)(1-\ln(2))$.