

# Esercizi di Geometria

(Carlo Petronio)

Foglio del 18/4/2014 (primo)

**Esercizio 1** Classificare a meno di trasformazioni affini la conica (anche se degenerare) definita dall'equazione assegnata, discutendo rispetto a  $k$  quando presente:

1.  $x^2 + 2xy - y^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$
2.  $2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y - 3 = 0$
3.  $5x^2 - 4xy + 7y^2 + 4x - 3y - \sqrt{11} = 0$
4.  $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x - 5y - 19 = 0$
5.  $4x^2 - 4xy + y^2 - 2y = 0$
6.  $x^2 - 2xy - 2x + 1 = 0$
7.  $9x^2 + 6xy + y^2 - \sqrt{10}x + 3\sqrt{10}y = 0$
8.  $3x^2 - 6xy + 6y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
9.  $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 5y + \sqrt{5} = 0$
10.  $4x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x - y + 22 = 0$
11.  $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$
12.  $2x^2 - 2xy + y^2 + 2y + 1 = 0$
13.  $5x^2 - 4xy + y^2 + 2y + 4\sqrt{2} = 0$
14.  $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$

15.  $xy + x - 3y + 4 = 0$
16.  $x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 7 = 0$
17.  $3x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$
18.  $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$
19.  $2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$
20.  $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$
21.  $23x^2 - 8xy + 17y^2 - 75 = 0$
22.  $2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + 6y + 5 = 0$
23.  $x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$
24.  $4x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 4y = 0$
25.  $4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 4 = 0$
26.  $x^2 - \sqrt{2}xy + 4y^2 + \sqrt{5} = 0$
27.  $2x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 10y + 10 = 0$
28.  $6xy + 3y^2 - 2x + 2y + 9 = 0$
29.  $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20x - 40y = 0$
30.  $37x^2 - 18xy + 13y^2 + 92x - 44y + 28 = 0$
31.  $7x^2 - 6xy - y^2 + 20x - 4y + 14 = 0$
32.  $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 = 0$
33.  $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - k = 0$
34.  $x^2 + kxy - 3y^2 + 2x + y - 1 = 0$
35.  $kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$
36.  $x^2 - 2xy + 2ky^2 + 2kx + 2y + 1 = 0$
37.  $(k + 1)x^2 + (k - 1)y^2 + 2kx + 2y - 1 = 0$

$$38. \quad kx^2 + 2\sqrt{k}xy + 3y^2 + 2\sqrt{k}x + k = 0$$

$$39. \quad x^2 - 2kxy + 4y^2 - 4x + 6y + \frac{13}{3} = 0$$

### **Soluzione 1**

1. Iperbole
2. Due rette incidenti:  $(2x - 3y + 1)(x + y - 3) = 0$
3. Ellisse
4. Parabola
5. Parabola
6. Iperbole
7. Parabola
8. Ellisse
9. Iperbole
10.  $\emptyset$
11. Due rette parallele:  $(x + y)(x + y + 1) = 0$
12. Ellisse
13.  $\emptyset$
14. Ellisse
15. Iperbole
16. Parabola
17. Ellisse
18. Iperbole
19. Ellisse

20. Parabola
21. Ellisse
22. Due rette incidenti:  $(2x - y - 5)(x - y - 1) = 0$
23. Iperbole
24. Ellisse
25. Iperbole
26. Insieme vuoto
27. Ellisse
28. Iperbole
29. Ellisse
30. Ellisse
31. Iperbole
32. Parabola
33. Ellisse per  $k > -5$ , un punto per  $k = -5$ , vuoto per  $k < -5$
34. Sempre un'iperbole
35. Iperbole per  $k < 4$ , vuoto per  $k \geq 4$ , infatti per  $k = 4$  viene  $(2x + y)^2 - 2(2x + y) + 5 = (2x + y - 1)^2 + 4$
36. Iperbole per  $k < -1$ , due rette incidenti  $x + (-1 \pm \sqrt{3})y - 1 = 0$  per  $k = -1$ , iperbole per  $-1 < k < \frac{1}{2}$ , parabola per  $k = \frac{1}{2}$ , ellisse per  $k > \frac{1}{2}$
37. Due rette incidenti per  $k = 0$ , parabola per  $k = \pm 1$ , iperbole per  $0 < |k| < 1$ , ellisse per  $|k| > 1$
38. Non definita per  $k < 0$ , una retta per  $k = 0$ , un punto per  $k = \frac{3}{2}$ , ellisse per  $0 < k < \frac{3}{2}$ , insieme vuoto per  $k > \frac{3}{2}$
39.  $\emptyset$  per  $1 < k < \frac{23}{13}$ ; un per  $k = 1$  e  $k = \frac{23}{13}$ ; ellisse per  $-2 < k < 1$  e per  $\frac{23}{13} < k < 2$ ; parabola per  $k = \pm 2$ ; iperbole per  $|k| > 2$

**Esercizio 2** Verificare che la conica affine  $\mathcal{C}$  di equazione  $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$  è un'ellisse. Determinare una trasformazione affine  $f$  di  $\mathbb{R}^2$  che trasformi  $\mathcal{C}$  nell'ellisse di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , e una isometria  $g$  di  $\mathbb{R}^2$  che trasformi  $\mathcal{C}$  in un'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  con  $a > b > 0$ , determinando  $a$  e  $b$ .

**Soluzione 2**  $(2x + y + 2)^2 + (2x - 4y - 1)^2 = 1$ ;

$$\begin{cases} X = \frac{2x+y+2}{\sqrt{5}} \\ Y = \frac{2x-4y-1}{2\sqrt{5}} \end{cases} \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$