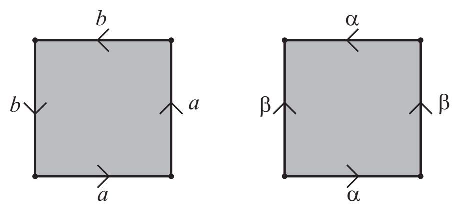
Esercizî di Geometria

(Carlo Petronio)

Foglio del 18/4/2014 (secondo)

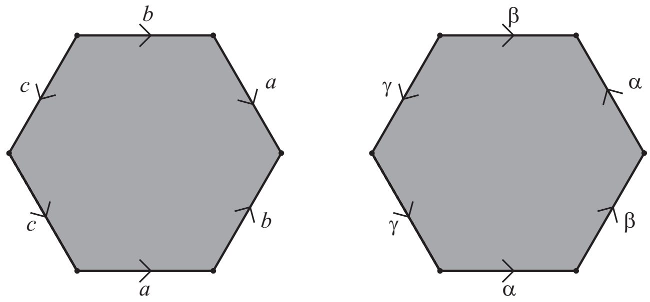
Esercizio 1 Provare che tagliando il nastro di Möbius a metà lungo la sua curva centrale si ottiene una sola superficie e non due. Che superficie è? E cosa succede facendo due tagli paralleli tra loro e paralleli alla curva centrale?

Esercizio 2 Prendere due quadrati ed eseguire le identificazioni tra coppie di lati del primo quadrato come suggerito dalle frecce e dalle etichette a, b nella parte sinistra della seguente figura, nonché le identificazioni tra coppie di lati del secondo quadrato come suggerito dalle frecce e dalle etichette α, β nella parte destra della seguente figura:



Provare che le due superfici risultanti sono in realtà la stessa.

Esercizio 3 Prendere due esagoni ed eseguire le identificazioni tra coppie di lati del primo esagono come suggerito dalle frecce e dalle etichette a, b, c nella parte sinistra della seguente figura, nonché le identificazioni tra coppie di lati del secondo esagono come suggerito dalle frecce e dalle etichette α, β, γ nella parte destra della seguente figura:



Provare che le due superfici risultanti sono in realtà la stessa.

Esercizio 4 Descrivere il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito dall'equazione $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$ e i suoi punti all'infinito.

Soluzione 4 $(x - y + 1)(x^2 - y^2 - 1) = 0$

Esercizio 5 Esibire un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$ definito da un'equazione di terzo grado, che abbia tre punti distinti all'infinito e che non contenga alcuna retta.

Soluzione 5 $xy(x + y) = 1$

Esercizio 6 Determinare i punti all'infinito dell'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ \left(x_1 + x_2 - (x_1 + x_2)^2\right) \cdot (x_1x_2 + 1) \cdot \left(x_1 - \sqrt{\pi}\right) \cdot \left(x_1^2 + 17x_2\right) = 0\right\}.$$

Esercizio 7 Determinare almeno un punto di intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tra gli insiemi

$$\{[t - 1 : t^2 - 4 : -t] : \ t \in \mathbb{R}\},$$
$$\{[1 - 3t^2 : 1 + t : 1 + 3t^2] : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Soluzione 7 $[1 : 0 : -2]$

Esercizio 8 Sia $\ell \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una retta proiettiva. Provare che esistono $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tali che la funzione $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \ell$ data da

$$f([t_0 : t_1]) = [t_0v_0 + t_1v_1]$$

è ben definita ed è una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e ℓ.

Esercizio 9 Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t-4 : 1-4t : t^2+t+1]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartiene alla retta passante per $[4 : -1 : 5]$ e $[3 : 3 : -1]$.

Soluzione 9 $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & t-4 \\ -1 & 3 & 1-4t \\ 5 & -1 & t^2+t+1 \end{pmatrix} = 15(t^2-5t+6)$
dunque $t = 2$ e $t = 3$