Esercizî di Geometria

(Carlo Petronio)

Foglio del 14/5/2014 (primo)

Esercizio 1 Confrontare tra loro le lunghezze delle seguenti curve:

$$\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2),$$

$$\beta : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \beta(t) = (\sin(2t), \cos(2t), 4t^2).$$

Esercizio 2 Calcolare $\int_\alpha \sqrt{1+x^2+y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = (t\cos(t), t\sin(t)).$$

Esercizio 3 Calcolare $\int_\alpha xy^2$ con $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Esercizio 4 Calcolare $\int_\alpha \sqrt{12+x}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1+t^3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 Calcolare $\int_\alpha \sqrt{1+y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6 Calcolare $\int_\alpha x$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t, t^2)$.

Esercizio 7 Calcolare $\int_\alpha xy$ con $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = (\sin(t), 2\cos(t)).$$

Esercizio 8 Considerare l'insieme

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \log(1 + x\cos(y)) + \cos(x) = 1\right\}.$$

Provare che C contiene $(0,0)$ e che è una curva vicino a $(0,0)$, quindi trovare la retta tangente a C in $(0,0)$.

Esercizio 9 Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2xy^2 + 3x^2y = 1\}$ esistono punti di C nei quali il vettore $(-1,4)$ è tangente a C?

Esercizio 10 Sia $\alpha : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \to \mathbb{R}^2$ la curva data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che α è semplice e ha lunghezza infinita. Trovare la funzione $\tau : [0, +\infty) \to \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tale che $\alpha \circ \tau$ sia in parametro d'arco. Calcolare la curvatura di α in ogni suo punto.

Esercizio 11 Dati $r, \lambda > 0$ trovare $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ che parametrizzi il luogo definito nelle coordinate polari (ρ, ϑ) dall'equazione $\rho = r \cdot e^{\lambda \cdot \vartheta}$. Trovare $\tau : (s_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $\tau(0) = 0$ tale che $\alpha \circ \tau$ sia in parametro d'arco. Calcolare la curvatura di α in ogni suo punto.

Esercizio 12 Data $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positiva e derivabile due volte trovare in funzione di ρ il parametro d'arco e la curvatura della curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \rho(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 13 Provare che se v e w sono vettori di $\mathbb{R}^3$ si ha

$$(v \wedge w) \wedge v = \|v\|^2 \cdot w - \langle w|v \rangle \cdot v.$$

Esercizio 14 Calcolare in ogni punto la curvatura e la torsione della curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) \\ 1 - \sin(t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 15 Per la curva α assegnata trovare il riferimento di Frénet, la curvatura e la torsione nel punto $\alpha(s_0)$ con s_0 indicato:

(a) $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s \cdot \cos(s) \\ 1 + s^2 \\ \log(1 + s) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = 0$

(b) $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 1 + 2s + s^2 - s^3 \\ e^{2s} \\ \sin(s) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = 0$

(c) $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 3s + s^3 \\ s \cdot \log(s) \\ \cos(\pi \cdot s) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = 1$

(d) $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \sin^2(s) \\ \tan(2s) \\ s^2 + \cos(s) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = \frac{\pi}{2}$