

Esercizi di Geometria

(Carlo Petronio)

Foglio del 14/5/2014 (secondo)

Esercizio 1 Calcolare $\int_{\alpha} (2xy^2 dx + 3x^2y dy)$ con $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 1 + t^2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 Calcolare $\int_{\alpha} (x dy - y dx)$ con $\alpha : [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Calcolare $d \left(e^{x+\cos(y)} \cdot \log \frac{\cos x}{y} \right)$.

Esercizio 4 Calcolare $d(e^{xy} \cos(x) dx + e^{x-y} \sin(xy) dy)$.

Esercizio 5 Verificare che la 1-forma ω assegnata è esatta e che è definita su sottoinsieme Ω semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 , quindi trovare un potenziale U di α :

(a) $\omega(x, y) = -5x^2y(3y dx + 2x dy)$

(b) $\omega(x, y) = e^y \left(\frac{1}{x} dx + \log(x) dy \right)$

(c) $\omega(x, y) = (2x + y \sin(xy)) dx + (x \sin(xy) - 1) dy$

(d) $\omega(x, y) = \frac{dx - 2y dy}{x - y^2}$

(e) $\omega(x, y) = y \sin(x) dx + (\cos(y) - \cos(x)) dy$

Esercizio 6 Per quali $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la 1-forma $\omega(x, y) = f(x, y) dy$ è chiusa?

Esercizio 7 Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la 1-forma

$$(x + ky^2) dx + (xy - k^2y^2) dy$$

ammette un potenziale su \mathbb{R}^2 .

Esercizio 8 Calcolare l'area della regione delimitata dal supporto della curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$ e da un segmento sull'asse delle ascisse.

Esercizio 9 Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato con bordo che è unione di curve, e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ammette derivate parziali continue, si può concludere che $\int_{\partial A} df$ si annulla?

Esercizio 10 Calcolare $\int_{\partial Q} ((x^2 + y^2) dx + (2xy + e^y) dy)$
con $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

Esercizio 11 Se ω_0, ω_1 sono 1-forme su \mathbb{R}^2 e $d\omega_0 = d\omega_1$, come sono legate tra loro ω_0 e ω_1 ?

Esercizio 12 Calcolare $\int_{\alpha} (\cos(y)(dx + dz) - (x + z) \sin(y) dy)$
con $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \left(t, \sin\left(\frac{t^2}{\pi}\right), t(t - \pi) \right).$$

Esercizio 13 Calcolare $\int_{\partial \Delta} (\cos(e^y) dy - y dx)$
con $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 14 Calcolare $\int_{\partial A} x dy$
con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1 + x^2\}$.

Esercizio 15 Posto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}$ parametrizzare ∂A con la giusta orientazione.