Esercizî di Geometria

(Carlo Petronio)

Foglio dell'11/3/2014

Esercizio 1 Provare che per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ si ha (*Determinante di Vandermonde*):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \,.$$

Dedurne il fatto seguente (*Interpolazione polinomiale*): dati nel piano $\mathbb{R}^2$ punti $P_1, \ldots, P_n$ con ascisse distinte esiste uno e un solo polinomio di grado al più $n-1$ il cui grafico contiene $P_1, \ldots, P_n$.

Esercizio 2 Calcolare la distanza tra i vettori v e w assegnati nello spazio euclideo standard di dimensione opportuna, nonché l'angolo da essi formato:

(a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 Dato $x \in \mathbb{R}^2$ non nullo esibire l'unica coppia (λ, ϑ) tale che la rotazione di angolo ϑ composta con l'omotetia di ragione λ trasforma x in e_1. Dedurne che due vettori $x, y \in \mathbb{R}^2$ non nulli sono ortogonali fra loro se e solo se $\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$.

Soluzione 3 Il numero λ vale $\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ mentre ϑ è l'angolo tale che $\cos(\vartheta) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ e $\sin(\vartheta) = -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$. Detta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione ottenuta componendo la rotazione di angolo ϑ con l'omotetia di ragione λ (non importa in quale ordine), abbiamo che f conserva gli angoli, dunque y è ortogonale a x se e solo se $f(y)$ è ortogonale a $f(x) = e_1$, ovvero se $f(y)$ ha prima componente nulla; la prima componente di $f(y)$ vale $\frac{x_1y_1+x_2y_2}{x_1^2+x_2^2}$, e la conclusione segue subito.

Esercizio 4 Verificare che nello spazio $C^0([0,1], \mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ i vettori S e C dati da

$$S(t) = \sin(2\pi t) \qquad C(t) = \cos(2\pi t)$$

sono ortogonali tra loro e hanno la stessa norma, trovandone il valore.

Soluzione 4 Hanno norma $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Esercizio 5 Calcolare l'angolo formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nello spazio $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}B \cdot A)$.

Esercizio 6 Stabilire se l'applicazione f assegnata sia bilineare, in tal caso se sia simmetrica, in tal caso se sia definita positiva:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 7x_1y_2 + 8y_1y_2 - 5x_2y_1$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = -3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + 7x_2y_2$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

(f) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_3y_3$

(g) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 2x_3y_3$

(h) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$

Esercizio 7 Stabilire per quali delle matrici A assegnate si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{\pi} & -1 \\ -\sqrt{\pi} & -\sqrt[3]{17} & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

(g) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esercizio 8 Dato lo spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e la forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{R}$, stabilire se f sia un prodotto scalare:

(a) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad f(A, B) = \sum_{i,j=1}^{2} (1 + (-2)^{i+j})(AB)_{ij}$

(b) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}(t), \quad f(p(t), q(t)) = p(1) \cdot q'(-1) + q(1) \cdot p'(-1)$

Soluzione 8

(a) No, non è simmetrica

(b) No, è simmetrica ma non è definita positiva

Esercizio 9 Stabilire per quali delle matrici A assegnate si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{\pi} \\ 5 & 3 & -1781 \\ \sqrt{\pi} & -1781 & e \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$

(h) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(j) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Soluzione 9

(e) Non è definita positiva: la forma quadratica associata è negativa sul vettore $2e_1 + e_2 - e_3$

(f) Non è definita positiva: la forma quadratica associata è nulla sul vettore $e_1 + e_2 - e_3$

(g) Sì: sul vettore $xe_1 + ye_2 + ze_3$ la forma quadratica associata vale

$$(2x - y)^2 + (x - 3z)^2(z - y)^2$$

Esercizio 10 Data $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definire B ponendo $b_{i\,j} = (-1)^{i+j} \cdot a_{i\,j}$. Provare che S definisce un prodotto scalare se e soltanto se lo fa B.

Esercizio 11 Dati $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$. In quali ipotesi su $v_1, \ldots, v_n$ si ha che $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$?

Soluzione 11 A è sempre simmetrica, dunque bisogna solo vedere quando $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è definita positiva. Posto $X = (v_1 \ \cdots \ v_n)$ si ha $A = {}^{\mathrm{t}}X \cdot X$, dunque per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha $\langle v|v\rangle_A = {}^{\mathrm{t}}v \cdot {}^{\mathrm{t}}X \cdot X \cdot v = {}^{\mathrm{t}}(X \cdot v) \cdot (X \cdot v) = \|X \cdot v\|^2_{\mathbb{R}^n}$, da cui segue che $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è definita positiva se e solo se X è invertibile, ovvero se e solo se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 12 Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e una forma bilineare simmetrica $f : V \times V \to \mathbb{R}$, si definisce la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$ associata ad f come $q(v) = f(v, v)$. Conoscendo q determinare f:

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$

(b) $V = \mathbb{R}^3, \quad q(x) = -2x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3$

(c) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad q(A) = \det(A)$

(d) $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad q(A) = \sum_{j=1}^{3} (A^2)_{j,3-j}$

(e) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t], \quad q(p(t)) = p(1) \cdot p(-2)$

Esercizio 13 Nello spazio $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ dotato del prodotto scalare

$$\langle p(t)|q(t)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

determinare un polinomio di norma $\sqrt{5}$ ortogonale a $1 + t$ e a $1 + t^2$.

Soluzione 13 $2 - 5t + 2t^2$

Esercizio 14 Provare che le funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ date da

$$\mathrm{SNCF}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono linearmente dipendenti} \\ \|x\| + \|y\| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathrm{NYC}(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

soddisfano le tre proprietà delle funzioni distanza. Spiegare inoltre perché si chiamano come si chiamano.

Esercizio 15 Nello spazio V con il prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato ortonormalizzare il sistema di vettori dato:

(a) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ -1789 \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot x \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(f) $V = C^0([0,1],\mathbb{R})$ $\quad \langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad u(t) = t - 2t^2,\ v(t) = t$

(g) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ $\quad \langle p(t)|q(t)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2)$
$u(t) = t - 2t^2,\ v(t) = t$

Esercizio 16 Nello spazio $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con A assegnata determinare una base ortonormale rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ del sottospazio ortogonale rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ ai vettori indicati:

(a) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

(c) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 17 Determinare la matrice $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ associata rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo alla proiezione ortogonale p di $\mathbb{R}^4$ su $W = \mathrm{Span}(e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4, e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4)$, verificando che ${}^{t}\!A = A^2 = A$.

Soluzione 17 I vettori assegnati costituiscono una base ortogonale di W ed entrambi hanno norma $\sqrt{7}$, dunque

$$p(x) = \frac{x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_3 + x_4 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

da cui segue che

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e le verifiche sono immediate.

Esercizio 18 In $\mathbb{R}^4$ determinare una base ortogonale del sottospazio ortogonale a $\mathrm{Span}(3e_1 + e_2 - 5e_3 + 2e_4, -2e_1 + 4e_2 + 3e_3 - e_4)$.

Soluzione 18 Basta trovare una base e poi ortogonalizzarla. Per trovare una base basta cercarne una con il primo vettore avente quarta componente nulla, che si trova calcolando il prodotto vettoriale alle prime tre componenti dei vettori dati, e con il secondo avente prima componente nulla, che si trova calcolando il prodotto vettoriale alle ultime tre componenti dei vettori dati:

$$\begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Ora il primo vettore si tiene e il secondo si sostituisce con

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix} - \frac{125}{726} \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

Esercizio 19 Nello spazio vettoriale reale V con il prodotto scalare $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ indicato ortonormalizzare il sistema di vettori assegnato:

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad \langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^2, \quad \langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $V = \mathbb{R}^3, \quad \langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_{\mathbb{R}^3},$
$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(d) $V = \mathbb{R}^3, \quad \langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix},$
$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(e) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad \langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A \cdot B),$
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A \cdot M \cdot B)$ con $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,
$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $V = \mathbb{R}[t]$, $\langle p(t)|q(t)\rangle = \int_0^1 p(s)q(s)\,\mathrm{d}s$,
$p_1(t) = 1 + 2t - t^2$, $p_2(t) = 2 - t + 3t^2$

Esercizio 20 Calcolare l'approssimazione di Taylor del second'ordine nel punto $(0,0)$ della funzione f assegnata, verificando in particolare che la matrice hessiana è simmetrica:

- $f(x,y) = (1 + x + 3y - 2xy)(-3 + \log(1 + 2x - 5y + 6xy))$
- $f(x,y) = y\cos(x - 3y^2) - 2x\sin(y + 5x^2)$
- $f(x,y) = \sin(1 + x - 2y)e^{x^2-y+2xy}$
- $f(x,y) = \log(1 + \sin(3x - 2y + xy))\cos(4y + e^{xy})$

Esercizio 21 Nello spazio V con il prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato esibire la proiezione ortogonale sul sottospazio W indicato:

(a) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot x$ $\quad W = \{x : \; 4x_1 - 3x_2 = 0\}$

(b) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$ $\quad W = \{x : \; 4x_1 - 3x_2 = 0\}$

(c) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot x$ $\quad W = \{x : \; x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$

(d) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot x$ $\quad W = \{x : \; 3x_1 + 2x_2 = 3x_2 - 5x_3 = 0\}$

(e) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$
$W = \{x : \; x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$

(f) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$
$W = \{x : \ 3x_1 + 2x_2 = 3x_2 - 5x_3 = 0\}$

(g) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \qquad \langle p(t)|q(t)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2)$
$W = \mathrm{Span}(t, t^2)$

Soluzione 21

(a) $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 28 & -8 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 29 & 2 & -5 \\ 2 & 26 & 10 \\ -5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

Esercizio 22 Esibire un'equazione parametrica della retta ortogonale al piano assegnato:

(a) $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$

(b) $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

(c) $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Esercizio 23 Esibire un'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta assegnata:

(a) $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 6x - 7y + z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 0 \\ 7x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -4x + 7y - 5z = 0 \\ 2x - 5y - 4z = 0 \end{cases}$

Esercizio 24 Trovare tutte le matrici X che definiscono applicazioni autoaggiunte rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con A assegnata e che soddisfano le ulteriori richieste eventualmente indicate:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{tr}(X) = 0 \qquad {}^{\mathrm{t}}X = X$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad {}^{\mathrm{t}}X + X = 0$

Soluzione 24

(c) $\begin{pmatrix} t & 2t \\ 2t & -t \end{pmatrix}$

Esercizio 25 Sullo spazio $\mathbb{R}^3$ considerare il prodotto scalare standard. Esibire la matrice che rappresenta la trasformazione descritta e verificare che è ortogonale:

(a) La riflessione f rispetto al piano di equazione $2x - 3y + 4z = 0$

(b) Una delle due rotazioni g di angolo $\frac{\pi}{6}$ intorno a Span $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $f \circ g$

(d) $g \circ f$

Soluzione 25

(a) $\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 21 & 12 & -16 \\ 12 & 11 & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Esercizio 26 Data $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che ${}^tM \cdot M$ sia diagonale invertibile, determinare quante sono le matrici diagonali D tali che $M \cdot D$ è una matrice ortogonale.

Soluzione 26 Se $M = (v_1 \ \cdots \ v_n)$ l'ipotesi significa che $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$. Inoltre se D ha coefficienti $k_1, \ldots, k_n$ sulla diagonale si ha $M \cdot D = (k_1 \cdot v_1 \ \cdots \ k_n \cdot v_n)$ e la condizione da realizzare è che $(k_1 \cdot v_1, \ldots, k_n \cdot v_n)$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, dunque per ogni j le uniche scelte possibili sono $k_j = \pm\frac{1}{\|v_j\|}$, pertanto ci sono 2^n possibili D.

Esercizio 27 In $\mathbb{C}^2$ considerare il prodotto scalare hermitiano standard. Determinare i vettori unitarî, con seconda componente immaginaria pura e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$.

Soluzione 27 Trovato il vettore del tipo $\begin{pmatrix} z \\ i \end{pmatrix}$ ortogonale a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$ si tratta di prendere il suo normalizzato e l'opposto di quest'ultimo. Bisogna imporre $(2+i)z + (1-3i)i = 0$, da cui $z = \frac{1}{5}(i-7)$, e i vettori cercati sono $\pm\frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i-7 \\ 5i \end{pmatrix}$.

Esercizio 28 In $\mathbb{C}^3$ considerare il prodotto scalare hermitiano standard. Determinare i vettori unitarî, con seconda componente reale, somma delle componenti nulla e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$.

Soluzione 28 Trovato il vettore del tipo $\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ -1-z \end{pmatrix}$ ortogonale a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ si tratta di prendere il suo normalizzato e l'opposto di quest'ultimo. Bisogna imporre $(1-i)z+(2+i)+(1-2i)(-1-z)=0$, da cui $z=i-3$, e i vettori cercati sono $\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} i-3 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$.

Esercizio 29 Determinare la matrice $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ associata rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo alla proiezione ortogonale p di $\mathbb{C}^2$ sul generato di $(2+i)e_1+(1-3i)e_2$, verificando che $A^*=A^2=A$.

Soluzione 29

$$p(z)=\frac{(2-i)z_1+(1+3i)z_2}{15}\cdot\begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -1+7i \\ -1-7i & 10 \end{pmatrix}\cdot z$$

dunque

$$A=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -1+7i \\ -1-7i & 10 \end{pmatrix}$$

e le verifiche sono immediate.

Esercizio 30 In $\mathbb{C}^2$ ortonormalizzare la base $\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix}\right)$.

Soluzione 30

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} \\ \widetilde{w_2} &= \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix}-\frac{(3-i)(1-i)+2i(-2)}{6}\cdot\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}=\ldots=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \\ w_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 31 In $\mathbb{C}^3$ calcolare la proiezione ortogonale di $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ sul generato W di $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Soluzione 31 L'ortogonale a W è generato dal coniugato di $\begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ i \end{pmatrix}$, dunque da $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}$, e allora la proiezione cercata è

$$\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(2+i)(1+i)+i}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5-3i \\ 2i-5 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

Esercizio 32 Al variare di $k \in \mathbb{C}$ considerare $A_k = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & k \end{pmatrix}$ e la forma sesquilineare f_k su $\mathbb{C}^2$ associata ad A_k.

(a) Stabilire per quali k la f_k è hermitiana.

(b) Stabilire per quali k la f_k è hermitiana e definita positiva, verificando che ciò accade per $k = 3$.

(c) Trovare un vettore di $\mathbb{C}^2$ con prima componente immaginaria pura che rispetto a f_3 sia unitario e ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$.

(d) Calcolare la proiezione ortogonale rispetto a f_3 di $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ sul generato di $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

(e) Ortonormalizzare rispetto a f_3 la base data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$.

Soluzione 32

(a) Per $k \in \mathbb{R}$.

(b) $f_3(z,z) = 2|z_1|^2 + 2\Re\left(i\sqrt{3}\,\overline{z_1}z_2\right) + k|z_2|^2 \geq 2|z_1|^2 - 2\sqrt{3}\,|z_1|\cdot|z_2| + k|z_2|^2$ (e per ogni valore di $|z_1|$ e $|z_2|$ si possono scegliere gli argomenti in modo che valga l'uguaglianza). Dividendo per $|z_2|$ si trova in $t = |z_1/z_2|$ un polinomio con $\Delta/4 = 3 - 2k$. Dunque se $k > 3/2$ la f_k è definita positiva, altrimenti non lo è.

(c) Imponendo che $\begin{pmatrix} i \\ z \end{pmatrix}$ sia ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$ rispetto a f_3, cioè che $(1+i\ 1-i)\cdot A_3 \cdot \begin{pmatrix} i \\ z \end{pmatrix} = 0$, si ottiene $z = \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$. Ora posto $w = \begin{pmatrix} 6i \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ si ha $f_3(w,w) = 72 + 18\sqrt{3}$, dunque i vettori cercati sono $\pm\frac{1}{3\sqrt{8+2\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} 6i \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(d) Posto $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $f_3(v,v) = 5-2\sqrt{3}$ e $f_3(w,v) = -i$, dunque $p_v(w) = -\frac{i}{5-2\sqrt{3}}v$.

(e) Detti v_1 e v_2 i vettori dati si ha $f_3(v_1,v_1) = 5+2\sqrt{3}$ e $f_3(v_2,v_1) = 1+\sqrt{3}$, dunque $w_1 = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}v_1$ e

$$\widetilde{w_2} = v_2 - \frac{1+\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}v_1 = \frac{3}{5+2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)i \end{pmatrix}.$$

Ora posto $\widetilde{\widetilde{w_2}} = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)i \end{pmatrix}$ si ha $f_3\left(\widetilde{\widetilde{w_2}}, \widetilde{\widetilde{w_2}}\right) = 3$, dunque $w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\widetilde{\widetilde{w_2}}$.

Esercizio 33 Nello spazio vettoriale complesso V con il prodotto scalare hermitiano assegnato trovare tutti i vettori v con le proprietà indicate:

(a) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$, con prima coordinata reale

(b) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$, con somma delle coordinate immaginaria pura

(c) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{pmatrix}$, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$, con prima coordinata reale

(d) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix}$, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$, con somma delle coordinate immaginaria pura

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 3-i \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} 3+i \\ -2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ con somma delle coordinate reale

(f) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} 3+i \\ 1-i \\ -2i \end{pmatrix}$, con terza coordinata immaginaria pura

(g) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 5 \end{pmatrix}$, v unitario, ortogonale a $e_1 + ie_3$ e a $2e_2 - ie_3$, con seconda coordinata reale

(h) $V = \mathbb{C}_{\leq 1}[z]$, $\langle p(z)|q(z)\rangle = p(1)\cdot\overline{q(1)} + p(i)\cdot\overline{q(i)}$, v unitario, ortogonale a $i + (2-i)z$, con valore reale in $z = -i$

Soluzione 33

(f) Un vettore ortogonale a entrambi è $\overline{\begin{pmatrix} -2 \\ 4+2i \\ -4-2i \end{pmatrix}}$, dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ -4+i \\ 2-i \end{pmatrix}$, e dobbiamo normalizzare $i(2+i)\begin{pmatrix} 1 \\ -4+i \\ 2-i \end{pmatrix}$, dunque concludiamo con

$\pm\frac{1}{\sqrt{115}}\begin{pmatrix} 2i-1 \\ 2-9i \\ 5i \end{pmatrix}$

(g) Imponendo l'ortongonalità di $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ troviamo $\frac{1}{2\sqrt{3913}}\begin{pmatrix} 17+111i \\ -52 \\ 34+14i \end{pmatrix}$

(h) Scegliendo $p(z) = 1 + \alpha(z+i)$ e imponendo l'ortogonalità troviamo $\alpha = \frac{3}{20}(3i-1)$, da cui $p(x) = \frac{1}{2\sqrt{35}}(20 + 3(3i-1)(z+i))$

Esercizio 34 Nello spazio vettoriale complesso V con il prodotto scalare hermitiano $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato esibire la proiezione ortogonale sul sottospazio W indicato, verificando che è autoaggiunta rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle$ e che ha quadrato uguale a se stessa:

(a) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}\right)$

(b) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \{z \in \mathbb{C}^2 : \ (1-i)z_1 + (2+i)z_2 = 0\}$

(c) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \\ 3-2i \end{pmatrix}\right)$

(d) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \{z \in \mathbb{C}^3 : \ iz_1+(1-2i)z_2+(3+i)z_3 = 0\}$

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -4 \\ 3-i \end{pmatrix}\right)$

(f) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard,
$W = \{z \in \mathbb{C}^3 : \ z_1 + 2z_2 + iz_3 = 0, \ (2-i)z_1 + 2iz_2 - z_3 = 0\}$

(g) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}\right)$

(h) $V = \mathbb{C}_{\leq 1}[z]$, $\langle p(z)|q(z)\rangle = p(2)\cdot\overline{q(2)} + 2p(-i)\cdot\overline{q(-i)}$,
$W = \mathrm{Span}(1 - 2i + (3+i)z)$.