Esercizî di Geometria

(Carlo Petronio)

Foglio del 7/5/2014

Esercizio 1 Determinare i possibili tipi affini di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito da un'equazione $(x\ y\ 1)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, con $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simmetrica avente determinante nullo.

Soluzione 1 Le possibilità per gli autovalori di Q e A sono:
$++/++0$ dunque un punto
$+-/+-0$ dunque due rette incidenti
$+0/+0+$ vuoto
$+0/+00$ una retta doppia
$+0/+0-$ due rette parallele
$00/00+$ vuoto
$00/0+-$ una retta
$00/000$ $\mathbb{R}^2$

Esercizio 2 Determinare il tipo affine della quadrica Q di equazione $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 + 2x_2 = 2$. Identificato $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con l'insieme dei punti all'infinito di $\mathbb{R}^3$, individuare l'intersezione di $\{[3-t : 2t-5 : 2t-3] : \ t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito di Q.

Soluzione 2 Iperboloide iperbolico (a una falda); $[1 : -1 : 1]$ e $[-3 : 7 : 9]$ ottenuti per $t = 2$ e $t = -6$

Esercizio 3 Determinare il tipo affine della quadrica assegnata, discutendolo al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ se presente:

(a) $2x^2 - y^2 + z^2 + 4xz + 2yz - 2x + 6y - 2z = 0$

(b) $x^2 + 3y^2 + 4xy - 2xz - 2yz - 4x - 3 = 0$

(c) $2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6xy - 2xz + 4yz - 4y + 2z - 1 = 0$

(d) $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4yz + 6z = 0$

(e) $x^2 + y^2 - 4xz + 6yz + 2x + 4z = 0$

(f) $-x^2 + y^2 - 4xy + 6yz - 2x + 4z = 0$

(g) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 4yz - 4x + 2y = 0$

(h) $x^2 - y^2 - 5z^2 - 2xy + 4xz + 2y - 4 = 0$

(i) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 4xy - 2xz - 2x - 2y + 1 = 0$

(j) $2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - 2y = 0$

(k) $y^2 + 3z^2 + xy + 3xz + 4yz + y = 0$

(l) $-xy + 2xz + yz + x + 2 = 0$

(m) $x^2 + 5y^2 + (k^2 + 9)z^2 + 2xy - 2kxz + 2kyz - 1 = 0$

(n) $x^2 + (k^2 + 1)y^2 + (k^2 + 2)z^2 - 2kxy + 2xz - 4kyz - 1 = 0$

(o) $x^2 + (k^2 - 1)y^2 - k^2z^2 + 2kxy - 2kyz - 4x - 4ky - 2z + 4 = 0$

(p) $x^2 + 2y^2 + (k^2 - 1)z^2 + 2xy + 2kyz - 2x - 2y + 1 - k = 0$

(q) $x^2 + (k^2 + k)y^2 + (k + 1)z^2 - 2kxy + 2kyz - 4x + 4ky + 2kz + k^2 + 3 = 0$

(r) $x^2 + (k^2 + k)y^2 + z^2 + 2kxy + 2kyz + 4x + 4ky - 2z + 4 - 2k = 0$

Soluzione 3

(a) Paraboloide iperbolico

(b) Paraboloide iperbolico

(c) Iperboloide a una falda

(d) Iperboloide a due falde

(e) Iperboloide a due falde

(f) Iperboloide a una falda

(g) Ellissoide

(h) Iperboloide a una falda

(i) Insieme vuoto

(j) Paraboloide ellittico

(k) Paraboloide iperbolico

(l) Iperboloide a due falde

(m) Ellissoide per $|k| > 3$, degenere (cilindro) per $|k| = 3$, iperboloide a una falda per $|k| < 3$

(n) Sempre ellissoide

(o) Sempre paraboloide iperbolico

(p) Iperboloide a una falda per $k > 0$, iperboloide a due falde per $k < 0$, degenere per $k = 0$

(q) Ellissoide per $k > 0$, iperboloide a una falda per $k < 0$, degenere per $k = 0$

(r) Iperboloide due falde per $k < \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)$ e per $1 < k < \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$, iperboloide a una falda per $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right) < k < 0$ e per $1 < k < \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$, ellissoide per $0 < k < 1$, paraboloide ellittico per $k = 1$, degenere (cono) per $k = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$ e degenere (cilindro) per $k = 0$