ETA 8/10/13

L suddivisione di K; $\psi_n : C_n(K) \to C_n(L)$

$$\psi_n(\sigma) = \sum_{\substack{\tau \in L^{[n]} \\ a(\tau) = \sigma}} \tau$$ (convenzione: τ orientato come σ).

ψ_n induce $H_n(K) \to H_n(L)$. Surjettività:

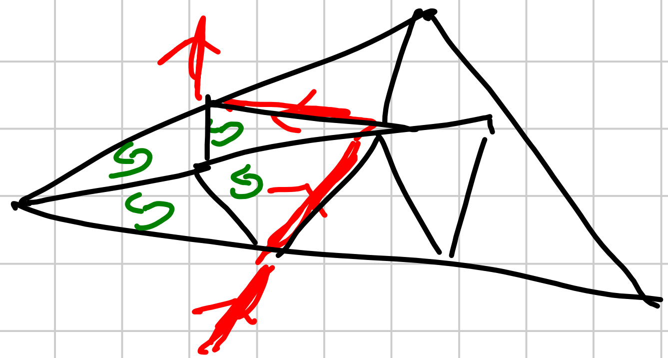
$\forall z \in Z_n(L)$ $\exists u \in B_n(L), w \in Z_n(K)$ t.c.

$$\psi_n(w) = z + u$$

Per provarlo basta trovare $u \in B_n(L)$ t.c. per ogni τ con coeff non nullo in $z+u$ si ha $a(\tau) \in K^{[n]}$: cioè usando $B_n(L)$ devo "svuotare" da z la parte interna di ogni $\sigma \in K^{(m)}$ con $m > n$. (Fatto questo si prosegue come detto.)

$(m=2,\ n=1)$

(caso $n>1$: esercizio).

$u =$ 

Per vedere che $|K| = |L| \Rightarrow H_n(K) \cong H_n(L)$ restava da vedere che l'intersezione di due politopi convessi lo è. Segue da:

$X \subset \mathbb{R}^n$ politopo convesso $\Longleftrightarrow$ X limitato e intersezione finita di semispazi.

$\Rightarrow$ fatto

$\Leftarrow$ Posso supporre $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X) \neq \emptyset$ (cioè che $S(X) = \mathbb{R}^n$):

infatti su $S(X)$, X è limitato e intersezione finita di sottospazi ottenuta così:

- scarto gli "H per X" con $\partial H \supset S(X)$
- per gli altri H prendo $H \cap S(X)$ (sottosp. in $S(X)$).

Ora: per induzione su $\dim(X) = n$

$n = 1$: intersezione limitata di un numero finito di semirette in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $[a,b]$ politopo conv

Passo induttivo:

$$X = H_1 \cap \dots \cap H_p \quad \text{con} \quad H_j \text{ stsp}, \quad \underset{\mathbb{R}^n}{\operatorname{int}}(X) \neq \emptyset :$$

Claim 1: $\partial X = X \cap \partial H_1 \cup \dots \cup X \cap \partial H_p$

$\supseteq$: ovvio

$\subseteq$: se

$x \subset X$ e $x \in \partial H_j$ per alcun $j \implies x \in \operatorname{int} H_j$

$\implies x \in \operatorname{int}(\underbrace{H_1 \cap \dots \cap H_p}_{= X})$.

Claim 2 (conclusione): se $X \cap \partial H_j = \mathrm{Conv}(\mathcal{V}_j)$ per ipotesi induttiva

dico che

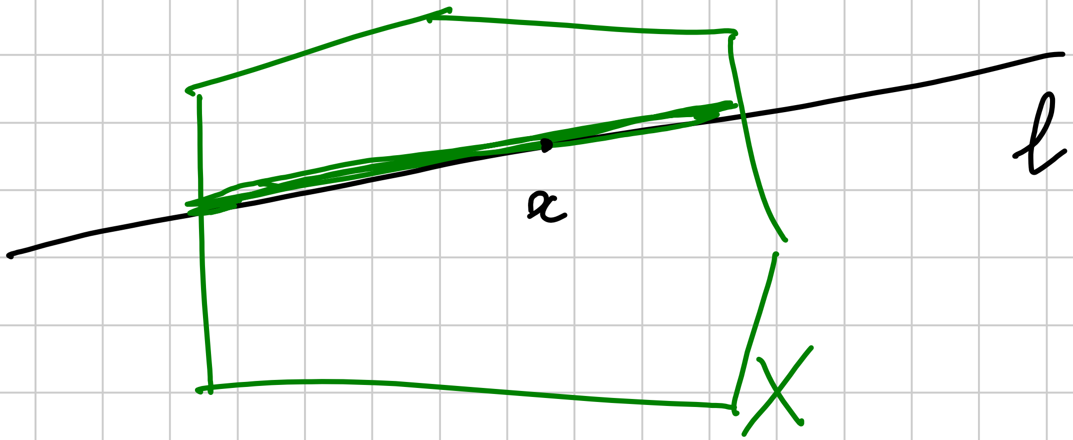
$$X = \mathrm{Conv}(\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_p).$$

$\supseteq$: ovvia $\quad X \supseteq \mathcal{V}_j$ ed è convesso

$\subseteq$: Sia $x \in X$; o $x \in \partial X \overset{\text{Claim 1}}{\Longrightarrow} x \in X \cap \partial H_j$

$\Longrightarrow x \in \mathrm{Conv}(\mathcal{V}_j)$

o $x \in \mathrm{int}(X)$ prendo ℓ retta per x



$\ell \cap X$ chiuso limitato convesso di ℓ

$\Rightarrow$ è $[p_0, p_1]$

con $p_0, p_1 \in \partial X$ e $x \in (p_0, p_1)$

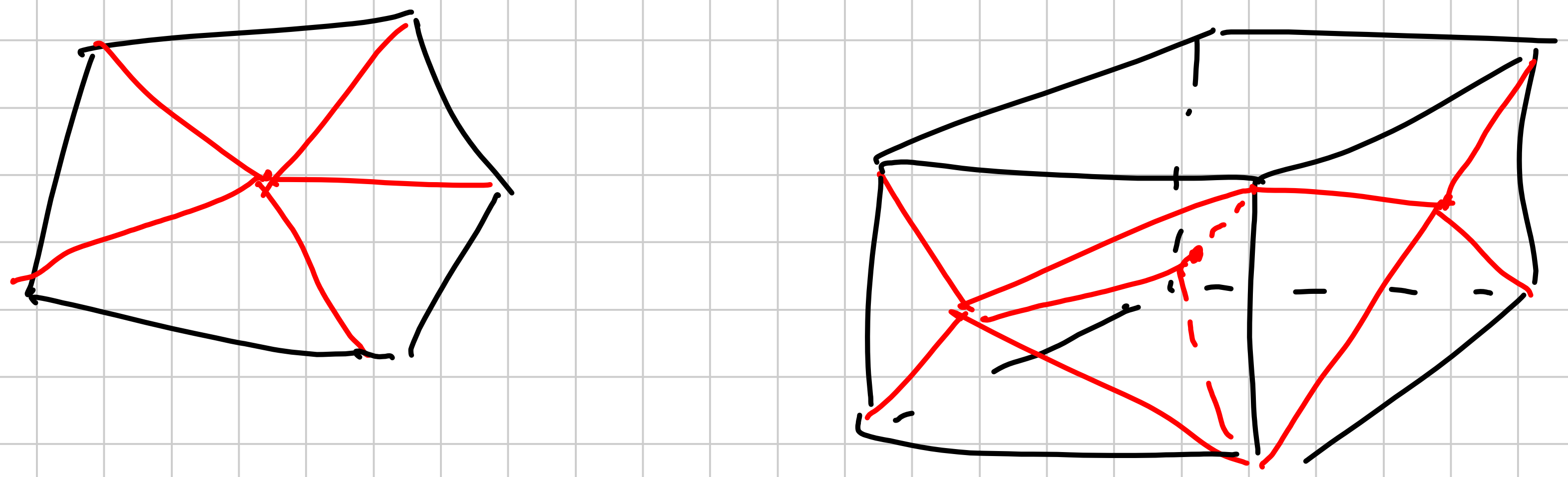
Ho visto che $p_0, p_1 \in Conv(\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_p)$

$\Rightarrow x \in Conv(\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_p)$.

$\boxtimes$

Oss: ogni complesso politopale ha una suddivisione che è un complesso simpliciale: procedere per $K^{(m)}$ ricorsivamente su m: $m=0$ $(m=1)$ ok;

$K^{(m)} \rightsquigarrow K^{(m+1)}$ prendere pto interno di ogni $\sigma \in K^{[m+1]}$ e fare i coni sulla suddivisione già trovata di $K^{(m)}$:



<u>Cor</u>: ogni complesso simpliciale K ha una suddivisione L con $\max\{\operatorname{diam}(\tau) : \tau \in L\} < \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$ arbitrario).

Basta prendere $K \cap$ la suddivisione di $\mathbb{R}^n$ in cubi $[0, \varepsilon/2]^n$

e poi prenderne una suddivisione simpliciale.

(Segue anche da iterazione della suddivisione baricentrica:

dato K c.s. definisco K' (sudd. bar.) su $K^{(m)}$

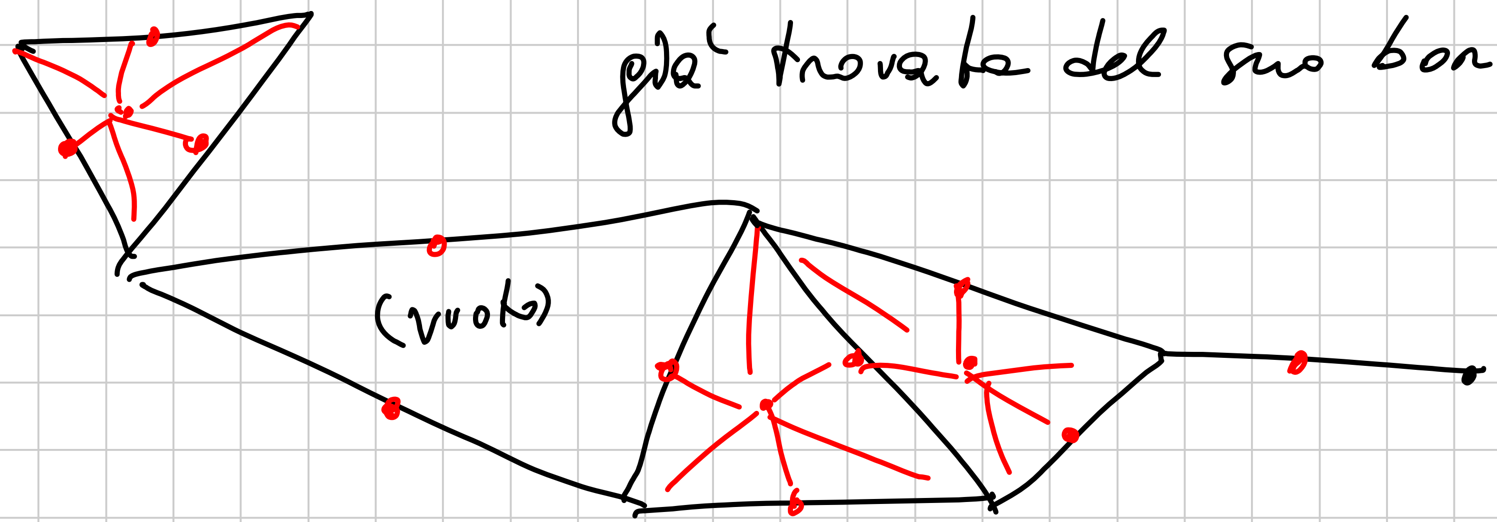
ricorsivamente su m: $\quad m=0$ niente

$m=1$ aggiungo i punti medi

$m \rightsquigarrow m+1$ aggiungo il baricentro

$$\mathrm{Car}(v_0, \dots, v_{m+1}) \ni \sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{m+2} \cdot v_i$$

e faccio il cono sulle suddivisione già trovata del suo bordo

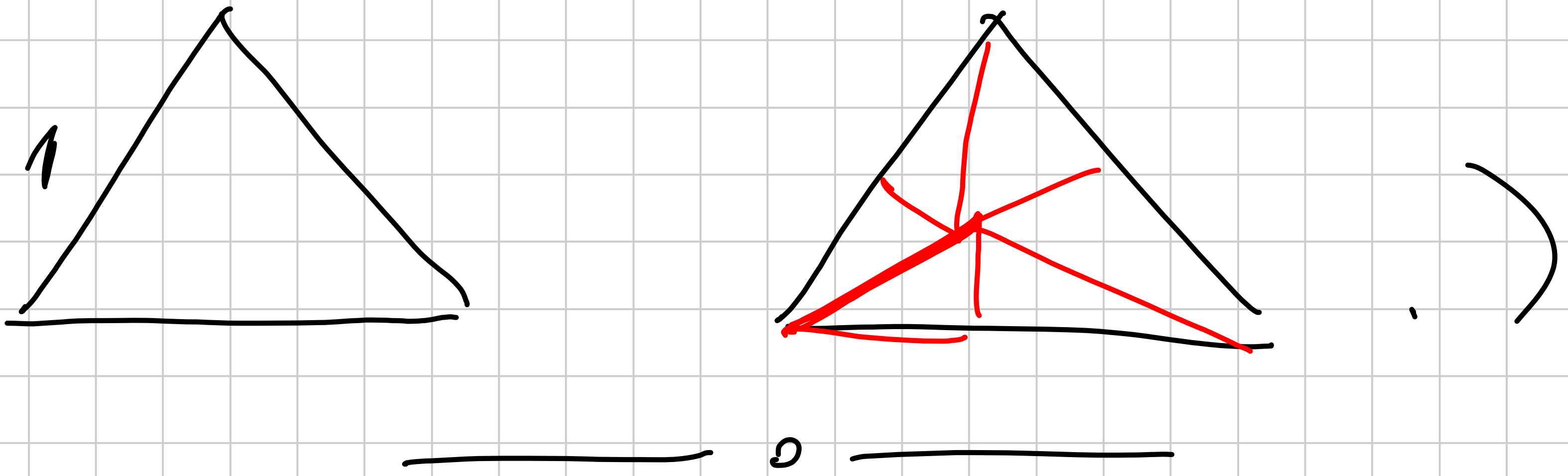


__Esercizio__: provare che $\lim_{q\to\infty} \max\{\mathrm{diam}(\tau) : \tau \in \underbrace{K^{q\cdot\prime}}_{\text{q-esima sudd. baricentrica}}\} = 0$

Soluz. errata:

* $\mathrm{diam}(\tau)$ = max. dist. tra suoi vertici
* ad ogni $K \rightsquigarrow K'$ dimezzo ogni lato

$\Longrightarrow$ il diametro si dimezza : FALSO



$H_n(K) \qquad n = 0, 1$

<u>Oss</u>: $H_n(K \sqcup H) = H_n(K) \oplus H_n(H)$

$|K| \cap |H| = \emptyset$

<u>Prop</u>: $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ se $|K|$ è connesso.

<u>Dim</u>: definisco $\psi : C_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$C_0(K) = Z_0(K)$$

$$\psi\left(\sum_{v \in K^{[0]}} n_v \cdot v\right) = \sum_{v \in K^{[0]}} n_v \cdot \varepsilon(v)$$

$\varepsilon(v) = \pm 1$ orientaz. di v

(wlog: $\varepsilon(v) = +1$ $\forall v$)

Dico: ψ surgettiva $(n \cdot \bar{v} \longmapsto n)$ ✓

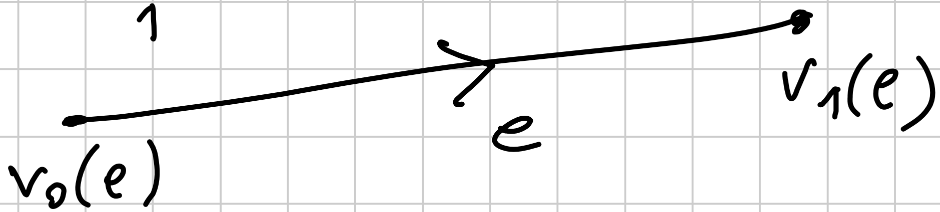
$\mathrm{Ker}(\psi) = B_0(\mathcal{C}) =$ sottogruppo di $C_0(K)$ generato da

$$\left\{ \underset{\partial(e)}{v_1(e) - v_0(e)} : e \in K^{[1]} \right\}$$

da provare

per def.

Notazione:



Ovviamente $\psi(v_1(e) - v_0(e)) = 1 - 1 = 0$.

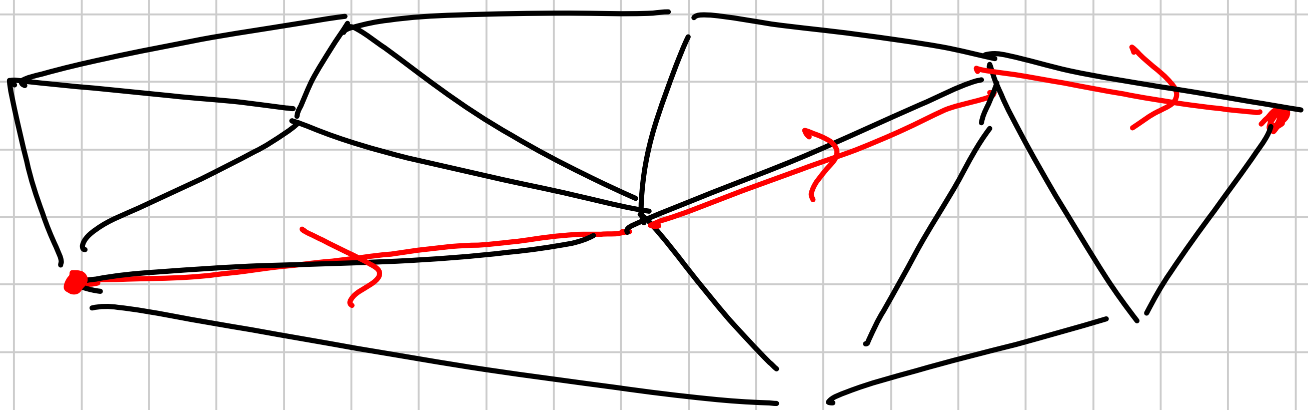
Affermo che $\operatorname{Ker}\psi$ è generato da

$$\{v_1 - v_0 : v_1, v_0 \in K^{[0]}\}$$

(Hint: Con $z = \sum n_v \cdot v$ procedere per induzione su $\sum |n_v|$.) Ora la conclusione segue da questo fatto:

<u>**Lem**</u>: se $|K|$ è connesso per archi allora ogni $v_0, v_1 \in K^{[0]}$

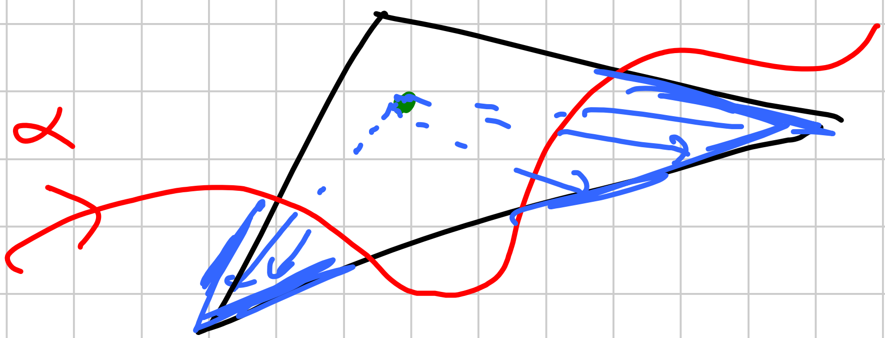
sono estremi di un cammino simpliciale semplice.



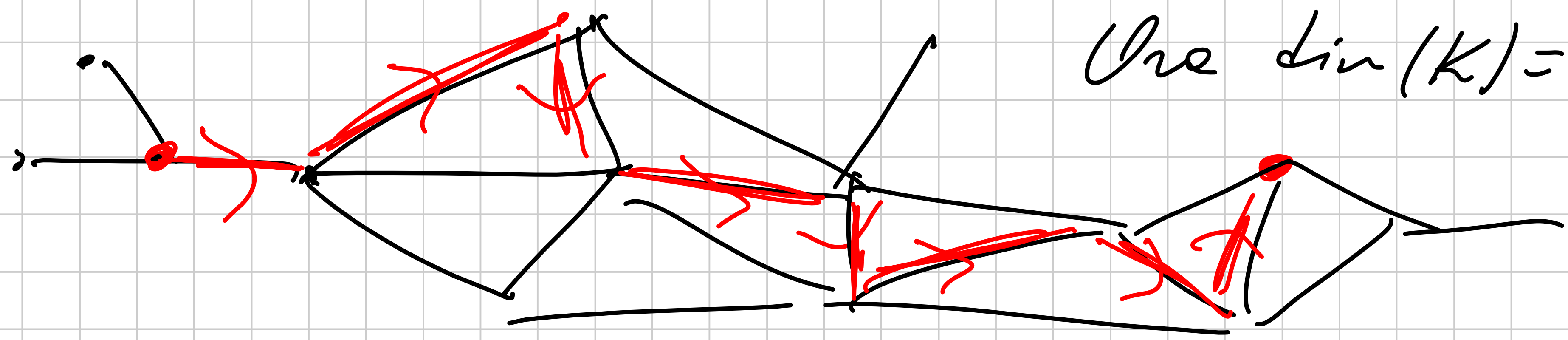
<u>Dim</u>: So che esiste $\alpha : [0,1] \to |K|$ continua con $\alpha(0) = v_0$, $\alpha(1) = v_1$; posso supporre α C^1 a tratti (a meno di omotopia)

$\Rightarrow$ in ogni simplesso di dimensione almeno 2 ci sono punti interni che non sono in $\mathrm{Im}(\alpha)$: ricorsivamente modifico α in modo che

$$\mathrm{Im}(\alpha) \subset K^{(m+1)} \longrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \subset K^{(m)}$$ purché $m \geq 1$



Alla fine $\mathrm{Im}(\alpha) \subset K^{(1)}$.



Ora $\dim(K)=1$

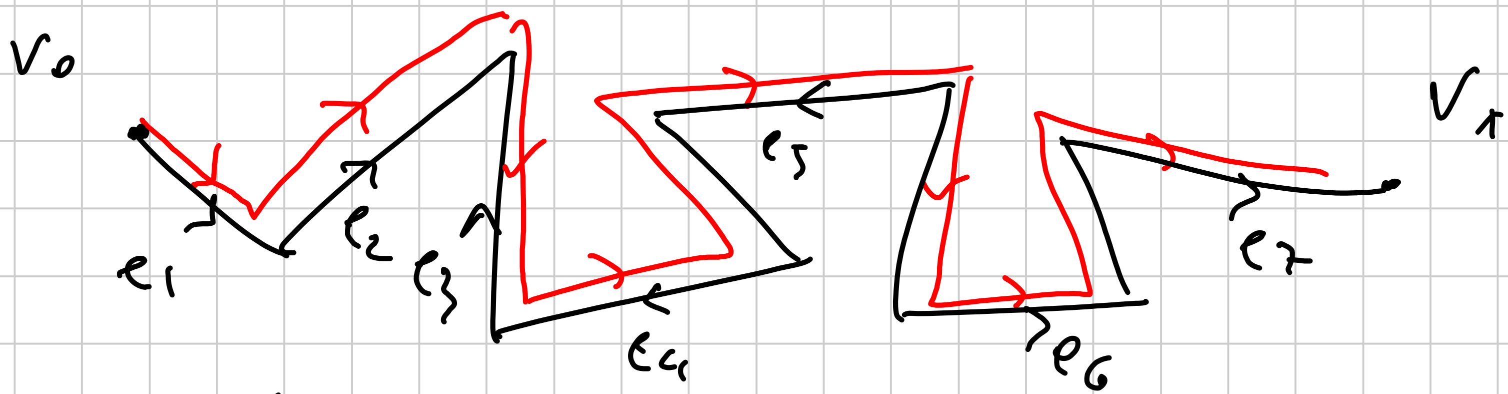
(Conclusione per esercizio —) $\boxed{//}$

<u>Esercizio</u>: K c.s. $|K|$ loc. c. a.

$\Longrightarrow$ (K connesso $\Longleftrightarrow$ K a.c.)

Def: Grafo: $|K|$ con $\dim(K) = 1$.

Per la condizione di $H_0(|K|) = \mathbb{Z}$



$$v_1 - v_0 = \partial(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 + e_7)$$

dunque che in $B_0(K)$. ▨

<u>Thm</u>: Se $|K|$ è connesso allora $H_1(K)$ è l'abelianizzato di $\pi_1(|K|)$

Il più grande quoziente abeliano, ovvero

$$\underbrace{\frac{\pi_1(|K|)}{[\pi_1(|K|),\pi_1(|K|)]}}$$

generato da $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$
al variare di $a,b \in \pi_1(|K|)$

<u>Oss</u>: $\forall G$, $[G,G]$ è automaticamente normale:

$$g \cdot [a_1,b_1] \cdots [a_k,b_k] \cdot g^{-1} = [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}] \cdots [ga_kg^{-1}, gb_kg^{-1}]$$

<u>Dimo</u>: Proprietà del π_1:

- $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ se $X \simeq Y$

omotopicamente equiv.

In particolare

$\pi_1(X) \cong \pi_1(A)$ se $A \subset X$ è un retratto per deformazione, cioè

$\exists h : X \times [0,1] \to X$ continua t.c.

$h(x,0) = x \ \forall x \in X$, $h(x,1) \in A \ \forall x \in X$, $h(a,t) = a \ \forall a \in A$

(ciò implica $X \simeq A$).

- Van Kampen: $X = U \cup V$, U, V aperti

$U, V, U \cap V$ connessi

$$\Rightarrow \pi_1(X) = \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{\text{min sgr. normale che contiene } \{ i_{U*}(\alpha) \cdot i_{V*}(\alpha)^{-1} : \alpha \in \pi_1(U \cap V) \}}$$

$i_U : U \cap V \hookrightarrow U \quad i_V : U \cap V \to V$

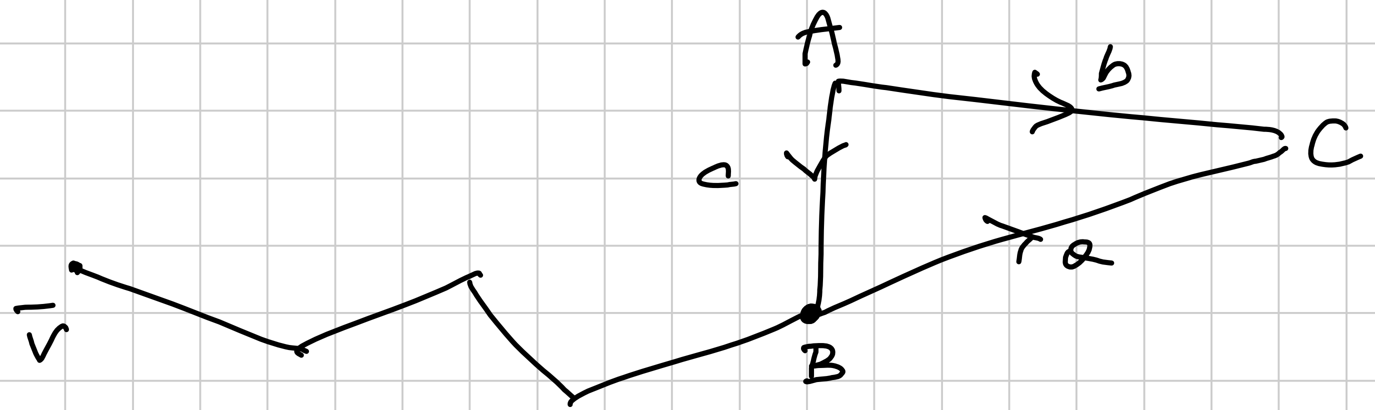
- $\pi_1(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{generato da} \dots \quad n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$

<u>Dimo</u> del Teo:

Scelgo $\bar{v} \in K^{[0]}$; affermo che

$$\pi_1(|K|) = \frac{\pi_1(|K^{(1)}|)}{\text{min. sgr. normale che contiene } \{ w_T : T \in K^{[2]} \}}$$

dove



$w_T = \alpha_B \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \alpha_B^{-1}$ con α_B qualsiasi cammino simpliciale da $\bar{v}$ a B;

(in particolare tale spr. normale non dipende dalle scelte degli α_B); inoltre

$\pi_1(|K^{(1)}|)$ è generato da lacci simpliciali basati su $\bar{v}$.