ETA 3/12/13

No lezione 12/10
Successiva: tutte e 4

Omologia singolare $C_n(X) = \left\{ \sum \varphi_i \sigma_i \ : \ \sigma_i : \Delta_n \to X \right\}$

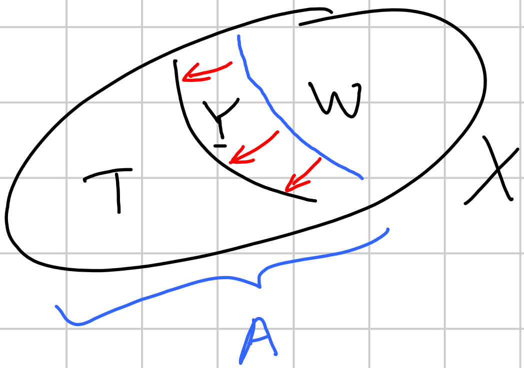
dimensione, 0-omologia (ridotta), LES, omotopia.

__Escissione__: $Z \subset A \subset X$, $\overline{Z} \subset \mathrm{int}(A)$

$(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$

induce isomorfismi in omologia.

__Cor__: escissione simpliciale



$A = \mathcal{U}(T)$, $Z = T \setminus Y$

$(X, A) \simeq (X, T)$

$(W, A \setminus (T \setminus Y)) \simeq (W, Y)$

$\overline{Z} \subset T \subset \mathrm{int}(A)$

$$H_n(X,T) \underset{\text{omotopia}}{\cong} H_n(X,A) \underset{\text{escissione simp.}}{\cong} H_n(\underbrace{X \setminus (T\setminus Y)}_{W}, A\setminus(T\setminus Y)) \underset{\text{omotopia}}{\cong} H_n(W,Y)$$

$\Longrightarrow H^{simp}(\text{complessi simpl}) \cong H^{simpl}(\ \dots\ )$

Prop: Se $\mathcal{U}$ è un ric aperto di X e

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) = \{ \textstyle\sum_i r_i \sigma_i \ : \forall i \ \exists U \in \mathcal{U} : \operatorname{Im}(\sigma_i) \subset U \}$$

Allora $i : C^{\mathcal{U}}_n(X) \to C_n(X)$ è equiv. omotopia

(nel senso dei complessi di catene!

$\exists \rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ t.c.

$\rho \circ i \simeq id_{C^{\mathcal{U}}(X)}$, $i \circ \rho \simeq id_{C(X)}$

esiste l'operatore prisma $C_n^{(\mathcal{U})} \to C_{n+1}^{(\mathcal{U})}$

(<u>Oss</u>: vale anche supponendo $\{int(U) : U \in \mathcal{U}\}$ copre.)

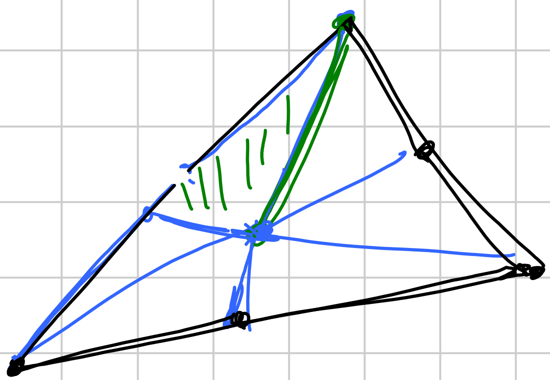
<u>Dimo</u>: Passi: (1) Suddivisione baricentrica.

Se τ è simplesso, $\tau = Conv(w_0, \dots, w_k)$ pongo

$\hat{\tau} = \frac{1}{k+1}(w_0 + \dots + w_k)$. Se σ è un simplesso

$\sigma = (v_0, \dots, v_n)$ chiamo suddivisione baricentrica

$$\sigma' = \{ \mathrm{Conv}(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_k) \; : \; \sigma_0 < \dots < \sigma_k \text{ facce di } \sigma, \; \dim \sigma_j = j \}$$



<u>Claim</u>: $\mathrm{diam}(\sigma') \leq \frac{n}{n+1} \cdot \mathrm{diam}(\sigma)$

!! $\max\{\operatorname{diam}\tau : \tau \in \sigma'\}$

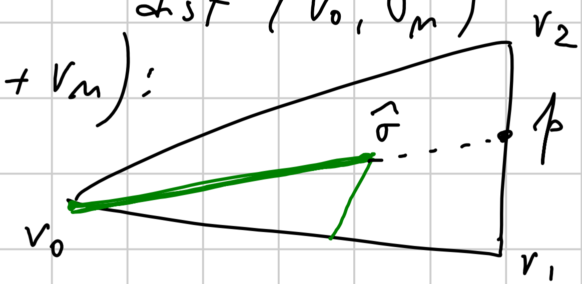
Per induzione. Se $(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_k) \in \sigma'$

se $k < n$ è nel $\partial\sigma \Rightarrow$ applico ipotesi induttiva

e $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$ — Se $k = n$ wlog $\sigma_0 = v_0$

ed è facile vedere che $\operatorname{diam}(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n) =$
$\operatorname{dist}(v_0, \hat{\sigma}_n)$

Ora pongo $p = \frac{1}{n}(v_1 + \dots + v_n)$:



si ha

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \cdot v_0 + \frac{n}{n+1} \cdot p \quad , \quad v_0, \hat{\sigma}, p \text{ sono allineati}$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam}(v_0, \dots, \hat{\sigma}) = d(v_0, \hat{\sigma}) = \frac{n}{n+1} d(v_0, p) \leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(\sigma).$$

Conseguenze: $\lim_{k \to \infty} \operatorname{diam}(\sigma^{(k)}) = 0$ _

(2) Operatori

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} \eta_i \qquad \eta_i : \Delta_n \to \Delta_n \; : \text{ ottenute}$$

esprimendo Δ_n come unione

dei coni su $\partial \Delta_n$ con vertice $\hat{\Delta}_n$

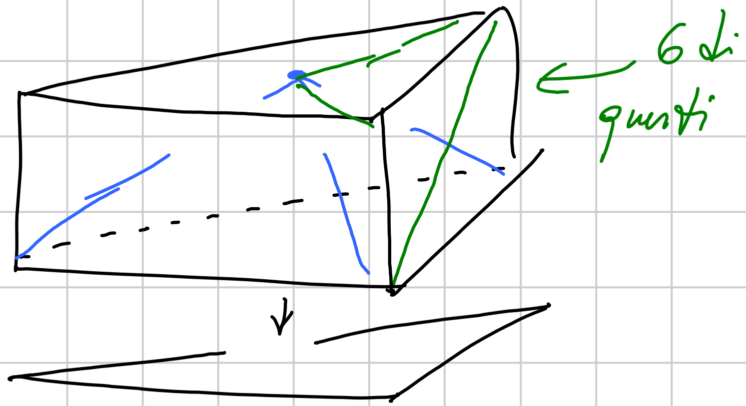
$E_n = \sum \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$: ottenute

esprimendo $\Delta_n \times [0,1]$ come

unione dei coni su $\left(\Delta_n \times \{0\} \cup \partial \Delta_n \times [0,1]\right)$

con vertice $\hat{\Delta}_n \times \{1\}$, e poi

proiettando su Δ_n



$S_n : C_n(X) \to C_n(X) \qquad S_n(\sigma) = \sigma \circ D_n$

$T_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X) \qquad T_n(\sigma) = \sigma \circ E_n$

Facile: S mappa di catene e T è omotopia tra $id_{C_n(X)}$ e S_n:

$$\partial_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n = id_{C_n(X)} - S_n.$$

Ora considero l'iterata S_n^k e pongo

$$R_n^{(k)} = \sum_{h=0}^{k-1} T_n \circ S_n^h$$

Fatto: $R_n^{(k)}$ è omotopia tra $id_{C_n(X)}$ e S_n^k:

$$\partial_{n+1} \circ R_n^{(k)} + R_{n-1}^{(k)} \circ \partial_n =$$

$$= \partial_{n+1} \circ \sum_{h=0}^{k-1} T_n \circ S_n^h + \sum_{h=0}^{k-1} T_{n-1} \circ S_n^h \circ \partial_n$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} \left(\partial_{n+1} \circ T_n \circ S_n^h + T_{n-1} \circ \partial_n \circ S_n^h \right)$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} \left(id_{C_n(X)} - S_n \right) \circ S_n^h = id_{C_n(X)} - S_n^k$$

(3) Conclusione: $\forall \sigma : \Delta_n \to X$ sia $k(\sigma)$ il minimo intero t.c. $S_n^{k(\sigma)}(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ (esistenza: usare numero di Lebesgue di $\sigma^{-1}(\mathcal{U})$) Definisco

$$R_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$$ estendendo

$$R_n(\sigma) = R_n^{(k(\sigma))}(\sigma)$$

Ho

$$\partial_{n+1} \circ R_n^{(k(\sigma))}(\sigma) + R_{n-1}^{(k(\sigma))} \circ \partial_n(\sigma) = \sigma - S_n^{k(\sigma)}(\sigma)$$

sommo e sottraggo $R_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)$: trovo e porto $R_{n-1}^{(k(\sigma))} \circ \partial_n(\sigma)$ al II membro

$$\partial_{n+1} \circ R_n(\sigma) + R_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) =$$

$$= \sigma - \underbrace{\left(S_n^{k(\sigma)} \sigma + R_{n-1}^{(k(\sigma))} \circ \partial_n \sigma - R_{n-1} \circ \partial_n \sigma \right)}_{\overset{\shortparallel}{\rho_n(\sigma)}}$$

Facile $\underbrace{\tau \subset \sigma}$ $\Longrightarrow$ $k(\tau) \le k(\sigma)$

cioè $\tau = \sigma|_{\text{faccia di } \Delta_n}$

da cui $\rho_n(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$

$\Rightarrow$ abbiamo $\rho_n : C_n(X) \longrightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Per def

$$\partial_{n+1} \circ R_n + R_{n-1} \circ \partial_n = id_{C_n(X)} - i_n \circ \rho_n$$

mentre $\rho_n \circ i_n = id_{C_n^{\mathcal{U}}(X)}$. $\boxtimes$

<u>Dimo</u> escissione: Sia $\overline{Z} \subset int(A)$;
posto $B = X \setminus Z$ ciò equivale a
$X = int(A) \cup int(B)$; applico Prop a
$\mathcal{U} = (A, B)$; ora

$C_n(A) = C_n^{\mathcal{U}}(A)$

$C_n(B) = C_n^{\mathcal{U}}(B)$

Tesi:

$(B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$

induce isomorfismi

e abbiamo

$$\partial_{n+1} \circ R_n + R_{n-1} \circ \partial_n = id_{C_n(X)} - i_n \circ \rho_n$$

$$\rho_n \circ i_n = id_{C_n^{\mathcal{U}}(X)}$$

e tutte le mappe coinvolte mandano $C_n(A)$ in $C_n(A)$

$\Rightarrow$ posso quozientare rispetto a $C_n(A)$

da cui

$$\frac{C_n^{u}(X)}{C_n(A)} \longrightarrow \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$ induce isomorf. in omologie

$$\Big\downarrow$$

$$H_n(X,A)$$

Inoltre

$$\frac{C_n(B)}{C_n(A\cap B)} \xrightarrow{\varphi} \frac{C_n^{u}(X)}{C_n(A)}$$

è isomorfismo:

$$\varphi(z + C_n(A \cap B)) = z + C_n(A)$$

$$w \in C_n^{\mathcal{U}}(X) \Longrightarrow w = \underset{\substack{\cap \\ C_n(A)}}{w_A} + \underset{\substack{\cap \\ C_n(B)}}{w_B}$$

ho $\varphi^{-1}(w + C_n(A)) = w_B + C_n(A \cap B)$

$$\Longrightarrow H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$$

con mappa indotta da inclusione — $\boxtimes$

Omologia con coefficienti in G (finora $G=\mathbb{Z}$)

(Si modifica quotienti teorie omologica
$\{(C_n, \partial_n)\} \rightsquigarrow H_n$ _)

$$C_n(X,A;G) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} g_i \sigma_i \; : \; g_i \in G, \ \sigma_i \text{ n-simplesso (o n-cella)} \right\}$$

$$\cong C_n(X,A) \otimes G$$

$$\partial_n^G : C_n(X,A;G) \to C_{n-1}(X,A;G)$$

$$\partial_n^G\left(\sum_i g_i \sigma_i\right) = \sum_i g_i(\partial_n \sigma)$$

(ovvero ∂_n^G corrisponde a $id_G \otimes \partial_n$ –

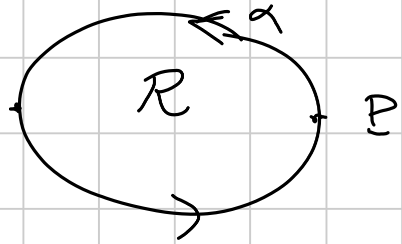
Ne segue subito: $\partial_{n-1}^G \circ \partial_n^G = 0$

dunque ho $H_n(X, A; G)$ _

Q: $C_n(X,A;G) = C_n(X,A) \otimes G$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} H_n(X,A;G) \cong H_n(X,A) \otimes G$$

No : $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



$\partial_0 P = 0$, $\partial_1 \alpha = 0$, $\partial_2 R = 2\alpha$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 \\
C & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\cdot} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\partial} & 0 \\
H & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \mathbb{Z}/2 & . & \mathbb{Z} & &
\end{array}
$$

$G = \mathbb{Z}/2$

$\partial_0^{\mathbb{Z}/2} P = 0$, $\partial_1^{\mathbb{Z}/2} \alpha = 0$, $\partial_2^{\mathbb{Z}/2} R = 0$

$$C^{\mathbb{Z}/2} \qquad \cdots 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \cdots$$

$$H^{\mathbb{Z}/2} \qquad \qquad \mathbb{Z}/2 \qquad \mathbb{Z}/2 \qquad \mathbb{Z}/2$$

<u>Esempio</u>: se $M^{(n)}$ è una varietà non orientabile ho

$$H_n(M) = 0$$

$$H_n(M;\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 \neq 0 \otimes \mathbb{Z}/2$$

/ canonicamente generato da $\sum_{\sigma \in K^{[n]}} \sigma$ $|K| = M$

Oss: $\forall M^{(m)}, N^{(n)}$ è def $\deg_2(f: M \to N) \in \mathbb{Z}/2$.

Fatto: $H_*(X,A)$ determina $H_*(X,A;G)$
(Teo dei coefficienti universali)

Richiamo: $G \otimes H$ = gruppo generato dai simboli $g \otimes h$ con relazioni di bilinearità.

Oss: $G \otimes \mathbb{Z} \cong G \qquad g \otimes 1 \longleftrightarrow g$

$G \otimes \mathbb{Z}/_m = G/_{m \cdot G} \qquad g \otimes [1] \longleftrightarrow [g]$

$\mathbb{Z}/_k \otimes \mathbb{Z}/_h = \mathbb{Z}/_{\text{l.c.m.}(k,h)}$ –

Def: chiamo risoluzione libera di G abeliano una $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ esatta con K e F liberi (cioè realizzare G come quoziente di due gruppi liberi) –

(F è libero se $F \cong \mathbb{Z}^X$ per qualche X;

fatto: un sottogruppo di un gruppo libero è libero –)

Def: Se $0 \to K \xrightarrow{i} F \to A \to 0$ è risoluz. libera di G, e B è gruppo abeliano chiamo $\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Ker}(i \otimes id_B)$

$$K \otimes B \xrightarrow{i \otimes id_B} F \otimes B.$$

È una buona def perché $\mathrm{Tor}(A,B) \cong \mathrm{Tor}(B,A)$.

Oss: $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ esatta e F è libero allora $A \otimes F \xrightarrow{\alpha \otimes id_F} B \otimes F \xrightarrow{\beta \otimes id_F} C \otimes F$

è esatta. (Se $F = \mathbb{Z}$, $A \otimes \mathbb{Z} = A$
$B \otimes \mathbb{Z} = B$ $\quad \alpha \otimes id_{\mathbb{Z}} = \alpha$
$C \otimes \mathbb{Z} = C$ $\quad \beta \otimes id_{\mathbb{Z}} = \beta$

altrimenti uso $G \otimes (F_1 \oplus F_2) = (G \otimes F_1) \oplus (G \otimes F_2)$ _

Dimo che $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(B, A)$: prendo risoluzioni libere

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ H \\ \downarrow j \\ G \\ \downarrow \\ B \end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K\otimes H \arrow[r] \arrow[d] & F\otimes H \arrow[r, "5"] \arrow[d, "4"] & A\otimes H \arrow[r] \arrow[d, "id_A\otimes j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K\otimes G \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & F\otimes G \arrow[r, "6"] \arrow[d, "2"] & A\otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & K\otimes B \arrow[r, "i\otimes id_B"] \arrow[d] & F\otimes B \arrow[r] \arrow[d] & A\otimes B & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

$u \in Ker(i\otimes id_B)$; 1 surj $\Rightarrow u = 1(v)$; pongo $t = 3(v)$

$2(t) = 2\circ 3(v) = i\otimes id_B\, 1(v) = i\otimes id_B(u) = 0$

$\Rightarrow t = 4(z)$; pongo $w = 5(z)$ e ho

$(id_A\otimes j)w = id_A\otimes j\circ 5(z) = 6\circ 4(z) = 6(t) = 6\circ 3(v) = 0$

$\Rightarrow$ posso definire $\varphi : \mathrm{Tor}(A,B) \to \mathrm{Tor}(B,A)$
$u \longmapsto w$

<u>Esercizio</u>: provare che è ben def e che quella costruita $\mathrm{Tor}(B,A) \to \mathrm{Tor}(A,B)$ allo stesso modo è l'inversa —