ETA 2/10/13

Fiuona e per un po': segno Matveev.

K complesso simpliciale geometrico finito, con orientaz. arbitrarie

$\sigma \in K^{[n]}$, $\tau \in K^{[n-1]}$ con $\tau \subset \sigma \rightsquigarrow \varepsilon(\sigma, \tau) \in \{\pm 1\}$

$C_n(K)$ gruppo ab generato da $K^{[n]}$

$\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K) \qquad \partial_n(\sigma) = \sum_{\tau \in K^{[n-1]},\ \tau \subset \sigma} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau$

Oss: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ $\quad Z_n(K) = \mathrm{Ker}(\partial_n)$ n-cicli

$B_n(K) = \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ n-bordi

$H_n(K) = Z_n(K) / B_n(K)$

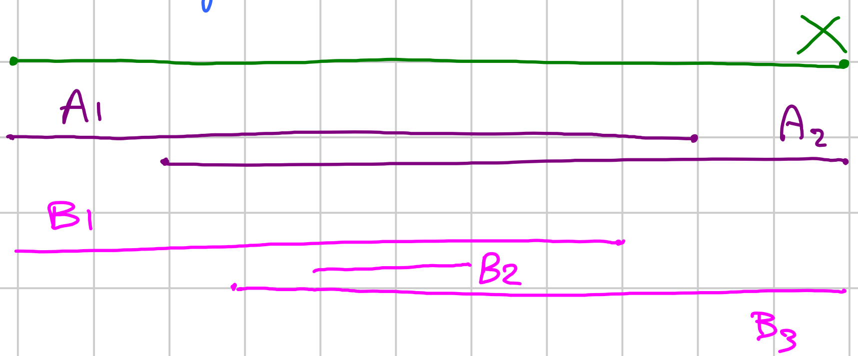
Prop: $H_n(K)$ non dipende dalle orientazioni / isomorfismo

Teo: $H_n(K)$ dipende solo da $|K|$ / isomorfismo.

Def: L è una suddivisione di K se $|L| = |K|$ e ogni $\tau \in L$ è contenuto in qualche $\sigma \in K$

Prop 1: se L è una suddivisione di K allora ogni $\sigma \in K$ è unione di elementi di L

Oss: se $X = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\} = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$ e ogni $B \in \mathcal{B}$ è contenuto in qualche $A \in \mathcal{A}$, può non essere vero che ogni $B \in \mathcal{B}$ è unione di elementi di $\mathcal{A}$:



Teo seguente: Teo 2 : se L è una suddivisione di K allora $H_n(L) \cong H_n(K)$ $\forall n$

Teo 3 : se $|K_1| = |K_2|$ allora K_1 e K_2 hanno una suddivisione comune.

Notazione : se σ è un simplesso

$S(\sigma)$ = il minimo stsp. affine che lo contiene

$\mathrm{int}(\sigma) = \mathrm{int}_{S(\sigma)}(\sigma) = \bigcup$ facce di σ di codim > 0.

Lem: σ, τ simplessi e $\tau \subset \sigma$

η faccia di σ, $\eta \cap \mathrm{int}(\tau) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \tau \subset \eta$.

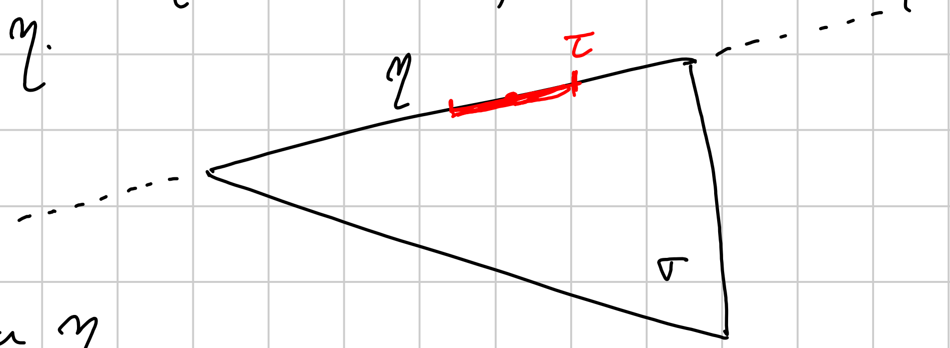
Dim: poiché

$\eta = \sigma \cap S(\eta)$

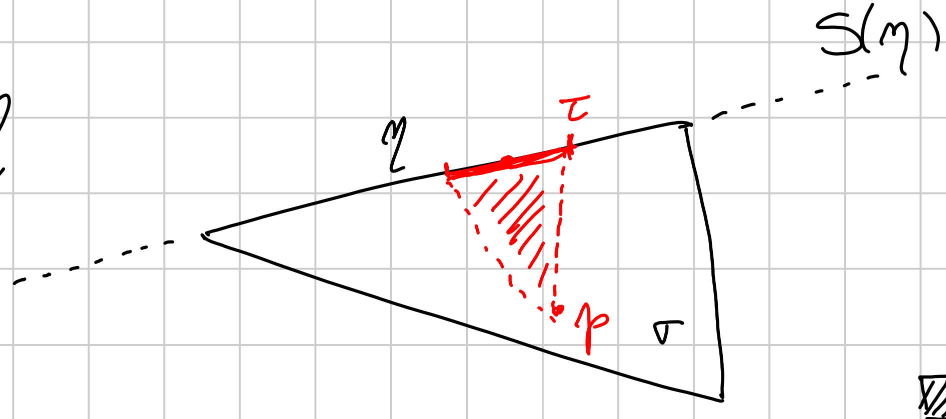
e $\tau \subset \sigma$, se

τ non fosse contenuto in η

conterrebbe un punto $p \notin S(\eta)$



$\Longrightarrow$ i punti di $\tau \cap \eta$ non sono interni a τ



$\blacksquare$

<u>Dimo</u> Prop <u>1</u> : ipotesi : $|L| = |K|$
ogni $\tau \in L$ è contenuto in qualche $\sigma \in K$

Prendo $\sigma \in K$; devo provare che σ è unione di elementi di L; prendo $x \in \sigma$; devo trovare $\tau \in L$ t.c. $x \in \tau$ e $\tau \subset \sigma$.

Poiché $|L| = |K| \ni x$ esiste $\tau \in L$ t.c. $x \in \tau$ e posso supporre che $x \in \mathrm{int}(\tau)$ (cioè: prendo il più piccolo $\tau \in L$ che contiene x).

Per ipotesi esiste $\sigma' \in K$ che contiene τ; ora se $\eta = \sigma \cap \sigma'$ abbiamo $\tau \subset \sigma'$

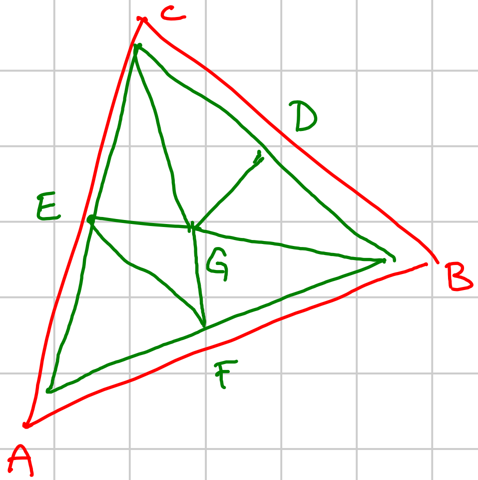
$\mathrm{int}(\tau) \cap \eta \neq \emptyset$ (poiché contiene x)

$\underset{(\text{Lem})}{\Longrightarrow}$ $\tau \subset \eta$ ma $\eta \subset \sigma$. $\blacksquare$

<u>Oss</u>: Se L suddivide K, data $\tau \in L$ chiamiamo $\overline{a(\tau)} \in K$ il più piccolo simplesso di K che contiene τ

K

H



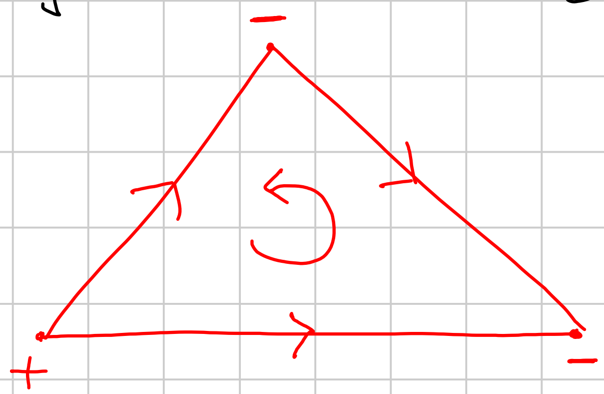
$a(A) = A$

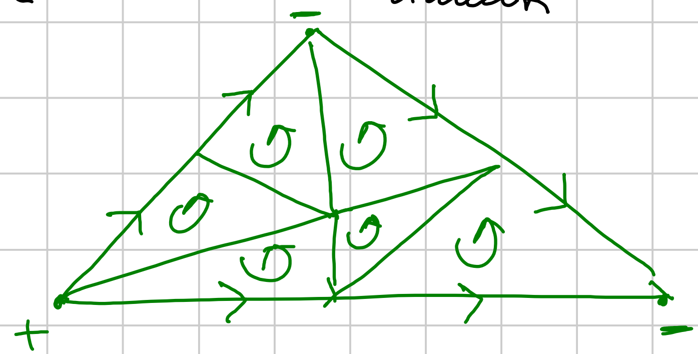
$a(E) = AC$

$a(G) = ABC$

(i) $\sigma \in K^{[m]} \Longrightarrow \sigma = \bigcup_{\substack{\tau \in L \\ a(\tau) = \sigma}} \tau = \bigcup_{\substack{\tau \in L^{[m]} \\ a(\tau) = \sigma}} \tau$

Convengo di orientare $\tau \in L^{[n]}$ $\begin{cases} \text{come } a(\tau) & \text{se } \dim(a(\tau)) = \dim(\tau) \\ \text{a caso} & \text{altrimenti} \end{cases}$





(ii) $\sigma \in K^{[n]}$, $\eta \in K^{[n-1]}$, $\eta \subset \sigma$

$u \in L^{[n-1]}$, $a(u) = \eta \implies \exists!\ \tau \in L^{[n]}$ con $a(\tau) = \sigma$

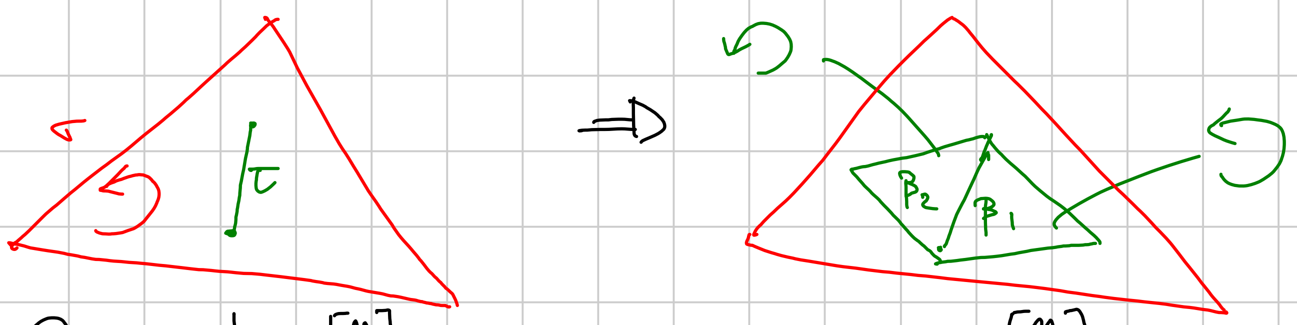
e $u \subset \tau$; inoltre $\varepsilon(\sigma, \eta) = \varepsilon(\tau, u)$

(iii) $\tau \in L^{[m-1]}$ $\quad a(\tau) \in K^{[m]}$

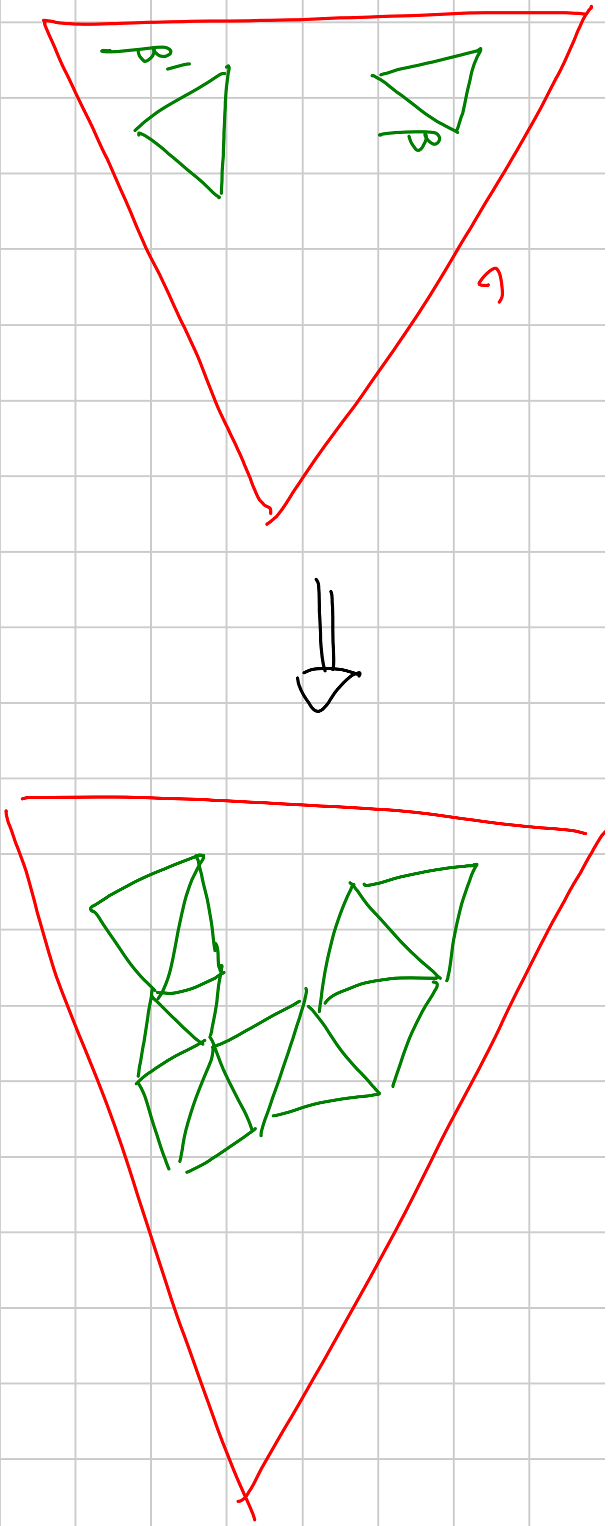
$\Rightarrow$ Esistono precisamente due $\beta \in L^{[m]}$ t.c.

$\tau \subset \beta$ e $a(\beta) = a(\tau)$; inoltre se sono β_1 e β_2 si ha

$\varepsilon(\beta_1, \tau) + \varepsilon(\beta_2, \tau) = 0$:



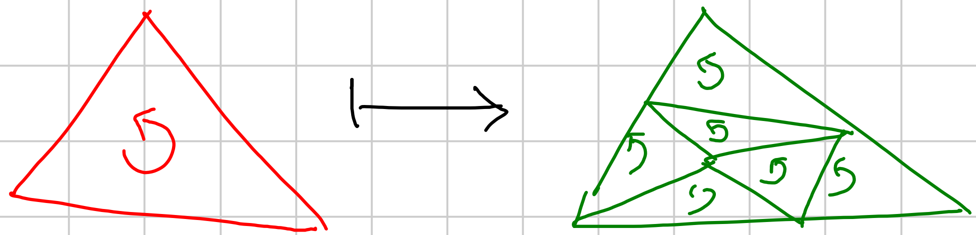
(iv) Se $\beta, \beta' \in L^{[n]}$ e $a(\beta) = a(\beta') \in K^{[n]}$ allora β e β' sono unite da une sequenze di passaggi $\beta_1 \xrightarrow{\tau} \beta_2$ come in (iii)


β-
β

Teo 2 : Se L suddivide K allora $H_n(L) \cong H_n(K)$ $\forall n$.

(**Oss**: la dimo dipende solo dalle proprietà (i) – (iv): avremo altri contesti in cui sono definite le dimensioni e le orientazioni e in cui valgono (i) – (iv) $\Rightarrow$ vale anche il Teo.2.)

Dimo: Definiamo $\psi_n : C_n(K) \longrightarrow C_n(L)$ estendendo linearmente $\psi_n(\sigma) = \sum_{\substack{\tau \in L^{[n]} \\ a(\tau) = \sigma}} \tau$



Provo:

(1) $\partial^L_{n-1} \circ \Psi_n = \Psi_{n-1} \circ \partial^K_n$

(cioè $(\Psi_n)_{n=0}^{\infty}$ è una mappa tra complessi di catene

$\Longrightarrow \Psi_{n*} : H_n(L) \to H_n(K)$ ben def. + omomorfismo)

(2) $\forall z \in Z_n(L)\ \exists w \in Z_n(K)$ t.c. $z = \Psi_n(w)$

($\Longrightarrow \Psi_{n*}$ surjettiva)

(3) $\forall z \in Z_n(K)$ se $\psi_n(z) \in B_n(L)$ allora $z \in B_n(K)$

($\Rightarrow \psi_{n*}$ iniettiva)

$\partial^L_{n-1} \circ \Psi_n = \Psi_{n-1} \circ \partial^K_n$: basta verificarlo su $\sigma \in K^{[n]}$

$$\partial^L_{n-1}(\Psi_n(\sigma)) = \partial^L_{n-1}\Big(\sum_{\substack{\tau \in L^{[n]} \\ a(\tau)=\sigma}} \tau\Big) = \sum_{\substack{\tau \in L^{[n]} \\ a(\tau)=\sigma}} \sum_{\substack{u \in L^{[n-1]} \\ u \subset \tau}} \varepsilon(\tau, u) \cdot u$$

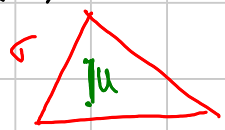
1

$$\Psi_{n-1}(\partial^K_n(\sigma)) = \Psi_{n-1}\Big(\sum_{\substack{\eta \in K^{[n-1]} \\ \eta \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma, \eta) \cdot \eta\Big)$$

$$= \sum_{\substack{\eta \in K^{[m-1]} \\ \eta \subset \sigma}} \sum_{\substack{u \in L^{[m-1]} \\ a(u) = \eta}} \varepsilon(\sigma, \eta) \cdot u \qquad (2)$$

In (1) e (2) sommo su simplessi $u \in L^{[m-1]}$ con $u \subset \sigma$; due casi

- se $a(u) = \sigma$ in (2) non compare



in (1) per (iii) compare due volte con coeff opposti.

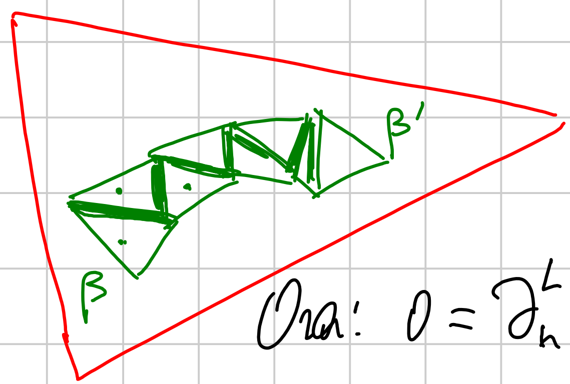
- se $a(u) = \eta \subset \sigma$, $\eta \in K^{[n-1]}$ in (1) per la (ii) compare esattamente una volta, come in (2), e con lo stesso coefficiente.

(1) ✓

Dimo di (2): $z \in Z_m(L)$ $\exists\, w \in Z_m(K)$ t.c. $z = \psi_m(w)$

Sia $\sigma \in K^{[n]}$ e $\beta, \beta' \in L^{[m]}$ con $a(\beta) = a(\beta') = \sigma$

So che $\partial_m^L(z) = 0 \Rightarrow$ in $\partial_m^L(z)$ hanno coeff 0 tutti i $\tau \in L^{[n-1]}$ con $a(\tau) = \sigma$; usando (iii) e (iv) abbiamo che β e β' in z hanno lo stesso coefficiente



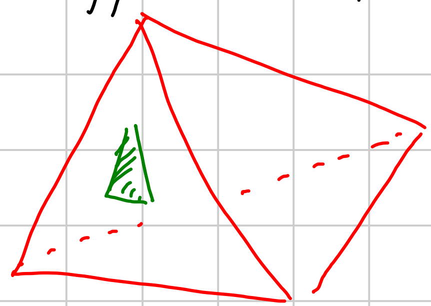
$\Rightarrow z = \psi_m(w)$ con $w \in C_n(K)$

Ora: $0 = \partial_n^L(z) = \partial_n^L \psi_n(w) \underset{(1)}{=} \psi_{m-1}(\partial_m^K w)$

ma ψ_{n-1} è iniettiva $\Rightarrow \partial_n^K w = 0$ cioè $w \in Z_n(K)$.

(3) $z \in Z_n(K)$, $\psi_n(z) \in B_n(L) \Rightarrow z \in B_n(K)$:

Se $\psi_n(z) = \partial^L_{n+1}(u)$; come prima: in $\partial^L_{n+1}(u)$ hanno coeff. nullo tutti gli $\eta \in L^{[n]}$ con $a(\eta) \in K^{[n+1]}$



"$\psi_n(z) \subset \partial$ tetraedro"

$\Rightarrow$ triangolo $\subset$ int (tetraedro) ha coeff nullo

Usando (iii) + (iv) vedo che in u tutti gli $\theta \in L^{[n+1]}$ che hanno come $a(\theta)$ un certo $\sigma \in K^{[n+1]}$ hanno lo stesso coefficiente $\Rightarrow u = \psi_{n+1}(w) \quad w \in C_{n+1}(K)$.

Ora

$$\psi_n(z) = \partial^L_{n+1}(u) = \partial^L_{n+1}(\psi_{n+1}(w)) = \psi_n(\partial^K_{n+1}(w))$$

ma ψ_n è iniettiva $\Rightarrow z = \partial^K_{n+1}(w)$. $\blacksquare$