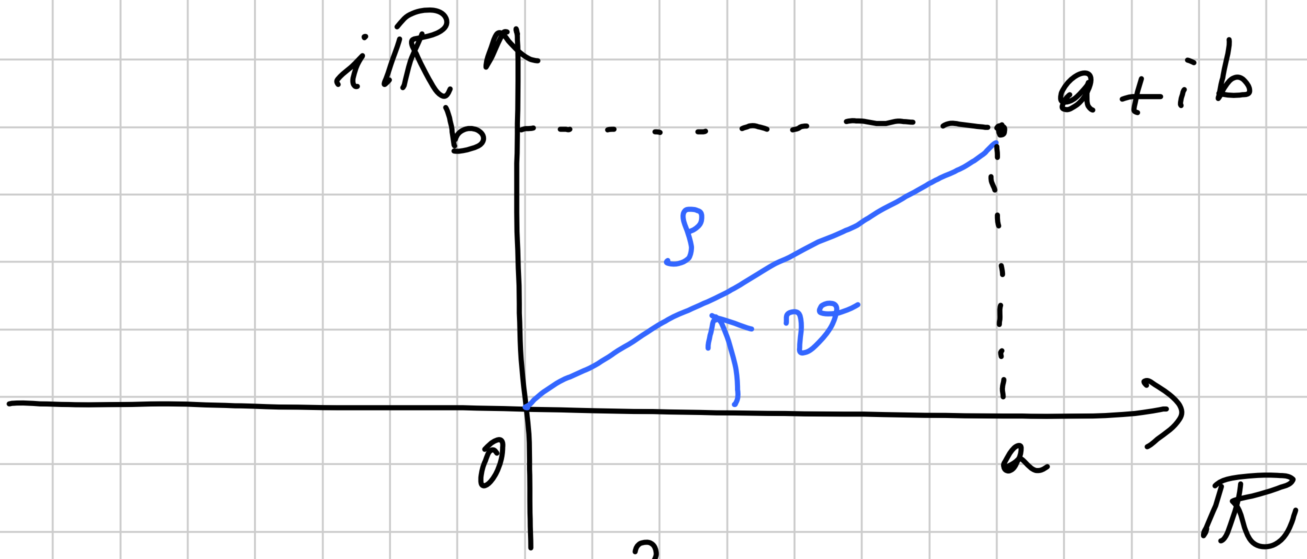
# Algebra Lineare 10/12/13

Domani: solo Fisica

Prossime att: solo io (esercizi e quindi tipo esame)

$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ campo

$\mathbb{C}$




$+$ per $\mathbb{C}$ è $+$ per $\mathbb{R}^2$

- interpretazione geometrica?

Def: dato $z = a+ib$ ho $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (modulo):

chiamo $\vartheta$ l'argomento di $z$, cioè quel numero per cui $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ con $\rho = |z|$.

(forma polare di $z$)

Oss: $z$ è definito con un'ambiguità di multipli interi di $2\pi$ (per $z \neq 0$; per $z = 0$ ambiguità è completa); potrei scegliere $\vartheta \in [0, 2\pi)$ oppure $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ e allora $\vartheta$ sarebbe unico (ma non conviene).

Calcoliamo, dati $z = \rho(\cos\vartheta + i\cdot\sin\vartheta)$

$$w = \eta(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

$$z\cdot w = \rho\cdot\eta\cdot(\cos\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta\sin\varphi + i(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi))$$

$$= \underbrace{\rho\cdot\eta}_{|z\cdot w|}\cdot\left(\cos\underbrace{(\vartheta+\varphi)}_{\text{argomento di } z\cdot w} + i\cdot\sin\underbrace{(\vartheta+\varphi)}_{\text{argomento di } z\cdot w}\right)$$

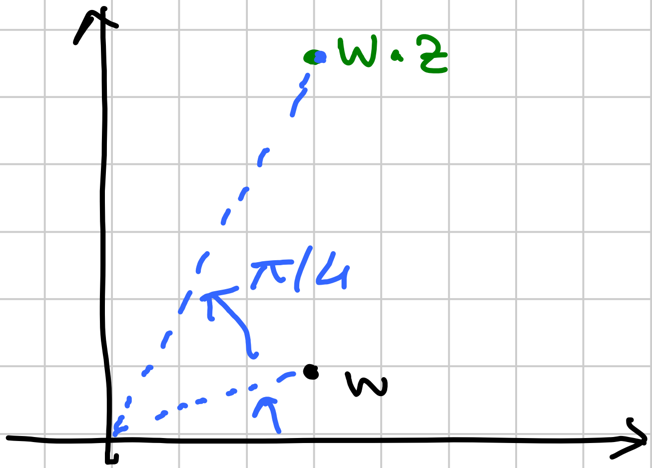
**Prop**: il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli; l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti.

**Cor**: fissato $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto w \cdot z \end{aligned}$$

è la composizione di:

- omotetia di centro $0$ e rap. $|z|$
- rotaz. intorno a $0$ di $\arg(z)$




$$\left( \begin{aligned} \rho &= 2 \\ \vartheta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right)$$

Chiamiamo $E(\vartheta) = \cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta$. Visto:

$$E(\vartheta) \cdot E(\varphi) = E(\vartheta + \varphi)$$

come $a^{\vartheta} \cdot a^{\varphi} = a^{\vartheta+\varphi}$ (per $a>0$).

Ciò suggerisce di scrivere $E(\vartheta) = b^{\vartheta}$ (con $b \notin \mathbb{R}$). Fatto: si sceglie $b = e^{i}$, dunque si pone

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta.$$

Giustificazione:

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots$$

Serie di Taylor

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad , \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

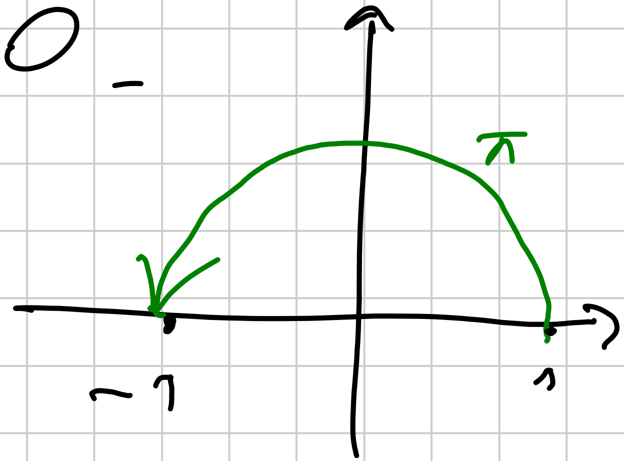
$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \dots \qquad\qquad t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + \dots$$

$$e^{i\vartheta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n \cdot \vartheta^n}{n!} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!}}_{\cos\vartheta} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\vartheta^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin\vartheta}.$$

Formula di Eulero: $e^{i\pi} + 1 = 0$.




$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

forma esponenziale di $z \in \mathbb{C}$.

Polinomi ed equaz. polinomiali.

$$\mathbb{C}[z] \overset{\text{“ ”}}{=} \left\{ a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_d z^d : \begin{array}{l} d \in \mathbb{N}, \\ a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

si possono aggiungere e togliere monomi $0 \cdot z^k$

Tutto quanto vale di algebrico (non analitico) per $\mathbb{R}[t]$ vale per $\mathbb{C}[z]$.

## Divisione tra polinomi (stessa dimo che su $\mathbb{R}$):

dati $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(q(z)) > 0$

esistono unici $g(z), r(z)$ t.c.

$$p(z) = g(z) \cdot q(z) + r(z) \quad , \quad \deg(r(z)) < \deg(q(z))$$

dividendo quoziente divisore resto

Dato $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, e dato $z_0 \in \mathbb{C}$ possiamo definire la valutazione di $p(z)$ in $z_0$ come $p(z_0)$ ottenuto sostituendo $z$ con $z_0$ in $p(z)$.

Diciamo che $z_0$ è radice di $p(z)$ se $p(z_0) = 0$, cioè se $z_0$ è una soluzione dell'equazione polinomiale $p(z) = 0$.

Teo (Ruffini): $z_0$ è radice di $p(z) \Longleftrightarrow p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)$

Dim: facciamo $p(z) : (z - z_0)$ :

$p(z) = (z - z_0) \cdot q(z) + r$. ($\deg r < \deg (z - z_0) = 1$ dunque $r \in \mathbb{C}$)

$p(z_0) = 0 \iff r = 0 \iff z - z_0$ divide $p(z)$. $\blacksquare$

Molteplicità di una radice:

supponiamo $z_0$ sia radice di $p(z)$

$\Longrightarrow p(z) = (z - z_0) \cdot g_1(z)$ ;

$g_1(z_0)$ $\neq 0$ mi fermo

$g_1(z_0)$ $= 0$ $\Longrightarrow g_1(z) = (z - z_0) \cdot g_2(z) \Longrightarrow p(z) = (z - z_0)^2 \cdot g_2(z)$

$g_2(z_0)$ $\neq 0$ mi fermo

$g_2(z_0)$ $= 0$ $\Longrightarrow p(z) = (z - z_0)^3 \cdot g_3(z)$

Procedo finché non trovo $p(z) = (z - z_0)^k \cdot g_k(z)$

con $g_k(z_0) \neq 0$

(poiché $\deg(g_i(z)) = \deg(p(z)) - i$ mi fermo).

Chiamo tale $k$ la molteplicità di $z_0$ come radice di $p(z)$. Riassumendo:

la molt. di $z_0$ è la più alta potenza $k$ tale che $(z-z_0)^k$ divide $p(z)$.

"la molt. di $z_0$ è il numero di volte per cui $z_0$ è radice di $p(z)$"

NO NO

—— o ——

Quantre radici ha un'equaz. polinomiale complessa?

I° caso: $z^n = a$ (soluzioni: radici n-esime di $a$) –

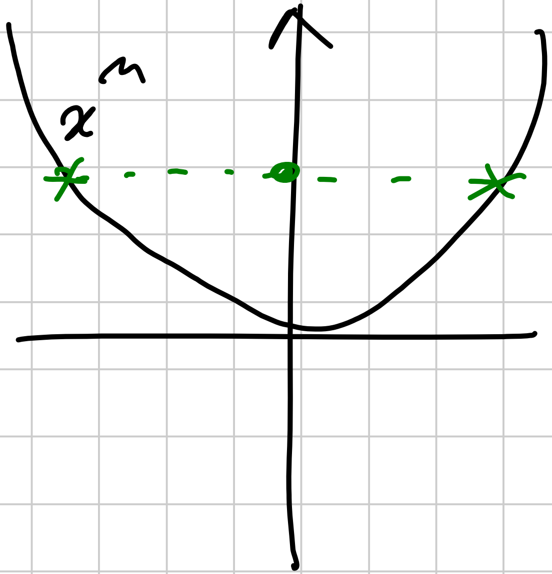
$a = 0$ soluz. unica $x = 0$

Su $\mathbb{R}$:

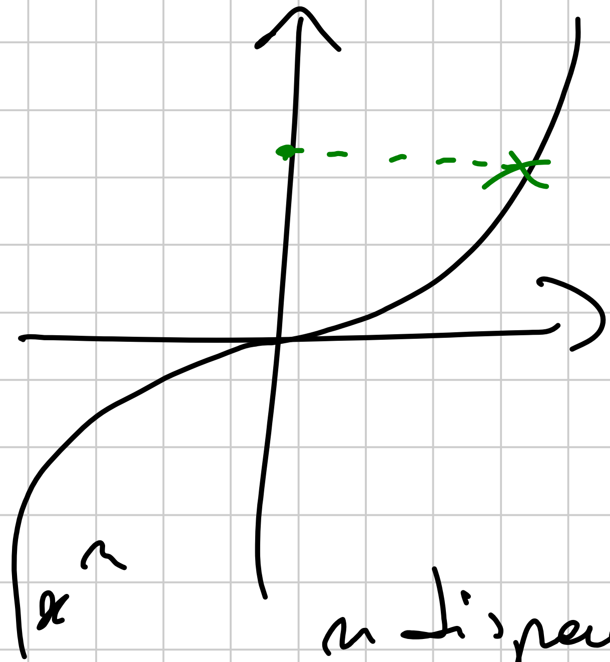
$x^n = a$

(con $a \in \mathbb{R}$,

cerco $x \in \mathbb{R}$)




$n$ pari




$n$ dispari

$n$ dispari $\Longrightarrow$ una sola soluz.

$n$ pari $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{due soluz. per } a>0 \\ \text{nessuna per } a<0 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ il numero di soluz. varia e non ha legami con $n$.

Su $\mathbb{C}$ : $z^n = a$. Se $a=0$ ho soluz. unica $z=0$.

Altrimenti scrivo $a = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\rho>0$ (modulo)

$\vartheta \in \mathbb{R}$ (argomento)

Cerco $z = \lambda \cdot e^{i\varphi}$ ; l'equazione è

$$\lambda^n \cdot e^{i(n\varphi)} = \rho \cdot e^{i\vartheta} \iff \begin{cases} \lambda = \sqrt[n]{\rho} > 0 \\ n\varphi \text{ è un argomento per } \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \sqrt[n]{\rho} \\ n\varphi = \vartheta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \frac{1}{n}(\vartheta + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sono infiniti? $\quad n = 5$

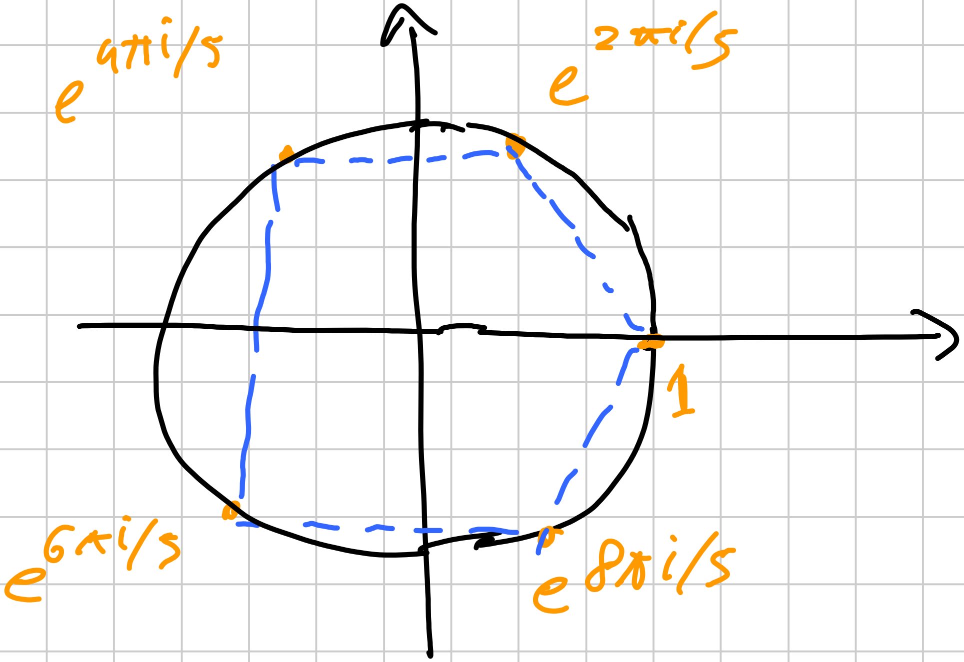
| $k$ | ... | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | | $\frac{\vartheta}{5} - \frac{2\pi}{5}$ | $\frac{\vartheta}{5}$ | $\frac{\vartheta}{5} + \frac{2\pi}{5}$ | $\frac{\vartheta}{5} + \frac{4\pi}{5}$ | $\frac{\vartheta}{5} + \frac{6\pi}{5}$ | $\frac{\vartheta}{5} + \frac{8\pi}{5}$ | $\frac{\vartheta}{5} + 2\pi$ | | |

No: ce ne sono esattamente $n$:

Prop: le radici di $z^n = a$ sono $n$ distinte e sono

$$\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Caso $a = 1$: le radici $n$-esime di $1$ sono:




$n = 5$

sono i vertici del poligono regolare con $n$ lati inscritto nella circonf. di centro $0$ e raggio $1$ e avente un vertice in $1$.

<u>Oss</u>: a differenza del caso reale l'equaz. $z^n = a$ ha sempre soluz. in $\mathbb{C}$ e ne ha $n$ distinte per $a \neq 0$.

**Teo** (fondamentale dell'algebra): ogni $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ non costante ha radici.

**Cor**; ne ha esattamente $\underbrace{n}_{=\deg(p(z))}$ se contate con la loro molteplicità. Infatti se le radici sono $z_1, \dots, z_k$ posso scrivere

$$p(z) = w \cdot (z - z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k}$$

$m_j$ = molt. di $z_j$ come radice di $p(z)$

$w \neq 0$ da cui $m_1 + \cdots + m_k = \deg(\chi(z))$. $\square$

---

29/11 (4c)

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Bigg| \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Bigg| \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \text{rank} = 2 .$$

$$\left( \overline{\underline{III}} = 2 \cdot I + II \ , \ \overline{\underline{IV}} = I + 2 \cdot II \right) .$$

(6a) $$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \lambda & \boxed{1} \\ 1 & -1 & \lambda \\ \boxed{1} & 2\lambda & \boxed{0} \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ;$$

(rank $\geq 2$)

$\det A = \ldots = 1 + 2\lambda - \lambda^2$ ; nullo per $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$ .

Per $\lambda \neq 1 \pm \sqrt{2}$ ho soluzione unica che trovo con Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 2\lambda & 0 \end{pmatrix}}{1+2\lambda-\lambda^2} = \frac{\lambda^2+4\lambda+3}{\dots} \; ; \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}{\dots} = \frac{1-2\lambda}{\dots}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2\lambda & 3 \end{pmatrix}}{\dots} = \frac{-2-3\lambda}{\dots}.$$

Per $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$ :

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & 2 \\ 1 & 2\lambda & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\det = -2-3\lambda \neq 0$ per $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$

$\Longrightarrow$ non ci sono soluzioni.

(6c) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \lambda - 2 \end{pmatrix}$

$\det A = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (2\lambda+1)(\lambda+1)$ nullo per $\lambda = -1$

e $\lambda = -1/2$

Per $\lambda \neq -1, -1/2$ ho soluz unica (Cramer...)

$\lambda = -1/2$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 2y + 4z = 6 \\ 2x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 2z \\ -5x = 6 \\ 6x = -5 \end{cases}$$

impossibile

$\lambda = -1$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 3 \\ \cancel{x + y - 2z = -3} \end{cases}$$

(presentaz. cartesiana di una retta)

$$\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix}+1\\+3\\+2\end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

---

6/12 (1a) $E: 4x-5y+6z=8$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\6\\5\end{pmatrix}\right)$$

oppure $$\begin{pmatrix}1\\1\\3/2\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$ oppure ...

(1e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \text{Span}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

$$-4x + 1 \cdot y - 1 \cdot z = -5$$

$$(-4+3-4 = -5)$$

(1g) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5w = 7 \\ 3x - 5y + 7z + 2w = -1 \end{cases}$ $\dim = 4 - 2 = 2$

Soluz. part. $\begin{pmatrix} 0 \\ 45 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cerco nella giacitura di $E$ un vettore del tipo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$: deve soddisfare

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5w = 7 \\ 3x - 5y + 7z + 2w = -1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -26 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cerco un vettore del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$; deve soddisfare

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5w = 7 \\ 3x - 5y + 7z + 2w = -1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -43 \\ -31 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -26 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -43 \\ -31 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

<u>non unico</u>!

(1i) $\begin{cases} 4x - y + 2z + w = 3 \\ 2x + 3y - 5z + 4w = 2 \\ \underbrace{2x - 4x + 7z - 3w}_{\mathrm{I}-\mathrm{II}} = \underbrace{5}_{\neq \mathrm{I}-\mathrm{II}} \end{cases}$ $\Rightarrow$ impossibile

Sostituendo $= 5$ con $= -1$ si fa come il precedente

(1k) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

dim $= 1$

$\Rightarrow 4 - 1 = 3$ eq. cart.:

$$\begin{cases} 7x + 2w = 13 \\ 7y + 5w = 1 \\ 7z + 4w = 33 \end{cases}$$