Algebra lineare, 8/10/13

V spazio vettoriale è un insieme con due operaz.

$$V \times V \to V \qquad \mathbb{R} \times V \to V$$

$$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \qquad \text{t.c.}$$

1. $v + 0 = v$ 2. $\forall v \ \exists (-v)$ t.c. $v + (-v) = 0$

3. $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ 4. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

5. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$ 6. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$

7. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$ 8. $0 \cdot v = 0$ $1 \cdot v = v$

$\underline{Es}$: $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$; se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ scrivo $(v)_i = x_i$;

es: $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \pi \\ -12 \\ 4e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow (v)_2 = \pi$. Operazioni:

$(x+y)_i = (x)_i + (y)_i \qquad (\lambda \cdot x)_i = \lambda \cdot (x)_i$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1/3 \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2/3 \\ \pi+e \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2/3 \\ \pi/3 \end{pmatrix}$

Verifica che è uno spazio vett: devo vedere 1-8:

1. $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 + v = v \quad \forall v$

2. $(-v)_i = -(v)_i$

opposto tra vettori

opposto tra numeri

5. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) \stackrel{?}{=} (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$ sono in $\mathbb{R}^n$;

sono uguali se e solo se per ogni i hanno i-esima componente uguale

$$(\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v))_i \qquad ((\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v)_i$$
$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad \shortparallel$$
$$\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)_i \qquad (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot (v)_i$$
$$\shortparallel$$

$\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot (v)_i)$

uguali per le associative del $\cdot$ in $\mathbb{R}$

(Esercizio: le altre.)

Esempio: dati $m, n \in \mathbb{N}$, positivi

$$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ per ogni } \begin{array}{l} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{array} \right\}$$

spazio delle matrici $\mathbb{R}$

coeff reali $m \times n$, cioè
con m righe e n colonne

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -e & 17 \\ 4 & 7 & -1/4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ scrivo $(A)_{ij} = a_{ij}$

indice di riga

indice di colonna

Es: $A =$ $\quad (A)_{23} = -1/4 \quad (A)_{12} = -e$

Definisco le operazioni ("si fanno posto per posto"):

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

$$(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot (A)_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1/4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1/3 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1/12 \\ 15/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -24 & 6 \end{pmatrix}.$$

Devo vedere 1-8

1. $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (\underline{0})_{ij} = \underline{0}$

2. $(-A)_{ij} = -(A)_{ij}$

7. $(\lambda_1 \underline{+} \lambda_2) \underline{\cdot} A \overset{?}{=} \lambda_1 \underline{\cdot} A \underline{+} \lambda_2 \underline{\cdot} A$

Sono entrambe $m \times n$; sono uguali se $\forall i,j$ il coeff di posto (i,j) è uguale

$$((\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A)_{ij} \qquad (\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A)_{ij}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$(\lambda_1 \underline{+} \lambda_2) \underline{\cdot} (A)_{ij} \qquad (\lambda_1 \cdot A)_{ij} + (\lambda_2 \cdot A)_{ij}$$

$$\lambda_1 \cdot (A)_{ij} + \lambda_2 \cdot (A)_{ij}$$

uguali per la distributiva in $\mathbb{R}$

Esercizio: le altre.

<u>Esempio</u>: $\mathbb{R}[x]$

$$\left.\begin{array}{l} p(x)+q(x) \\ \lambda \cdot p(x) \end{array}\right\} \text{già definite}$$

Verifica 1-8: esercizio. Noto che in $\mathbb{R}[x]$ c'è l'operazione $p(x) \cdot q(x)$ — prodotto tra polinomi —

che non fa parte della struttura di spazio vettoriale.

Esempio: S insieme; $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ = l'insieme delle funzioni da S a $\mathbb{R}$.

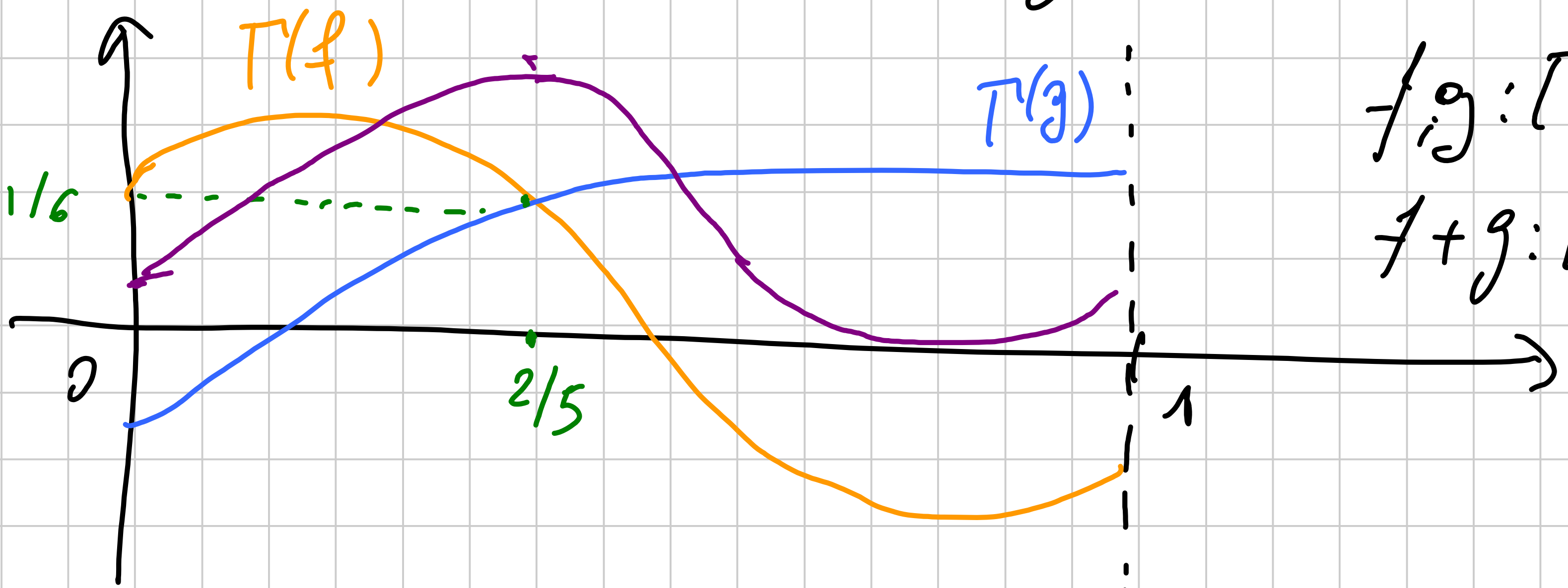
Su $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ definisco una struttura di sp. vett:

$$\mathcal{F}(S,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(S,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$$

$$(f \quad , \quad g) \longmapsto f+g$$

(devo definire tale $f+g$): dominio S, codom. $\mathbb{R}$, regola $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in S$.

$S = [0,1]$ posso descrivere ogni f tramite il suo grafico $\Gamma(f)$



$f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$

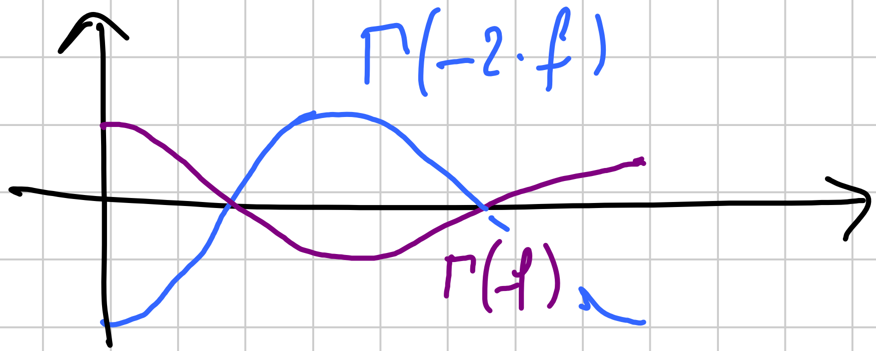
$f+g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$$

$$(\lambda, f) \longmapsto \lambda \cdot f$$

$\lambda \cdot f$ ha dom. S, codom. $\mathbb{R}$ e legge

$$(\lambda \cdot f)(s) = \lambda \cdot f(s) \quad \forall s \in S$$



Proprietà: 1. $0 \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ $\quad 0(s) = 0$

Data $f \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ devo vedere che $0 + f = f$.

Sono funzioni da S a $\mathbb{R}$ dunque sono uguali se e solo se sono le stesse leggi, cioè

$$(0+f)(s) = f(s) \qquad \forall s \in S$$

Infatti:

$$(0+f)(s) = 0(s) + f(s) = \underline{0} + f(s) = f(s)$$

uso def $+$ in $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ $\quad$ uso la def. di $0 \in \mathcal{F}(S,\mathbb{R})$

OK

Verifico 6 : $\lambda\cdot(f_1+f_2) \overset{?}{=} \lambda\cdot f_1 + \lambda\cdot f_2$

sono funz. $S \to \mathbb{R}$: uguali se e solo se coincidono su ogni $s \in S$

$$(\lambda\cdot(f_1+f_2))(s) \overset{?}{=} (\lambda\cdot f_1 + \lambda\cdot f_2)(s)$$

uso def $\cdot$ in $\mathcal{F}$ $\qquad\qquad$ uso def $+$ in $\mathcal{F}$

$$\lambda\cdot((f_1+f_2)(s)) \qquad\qquad (\lambda\cdot f_1)(s) + (\lambda\cdot f_2)(s)$$

uso def $+$ in $\mathcal{F}$ $\qquad\qquad$ uso 2 volte def $\cdot$ in $\mathcal{F}$

$$\lambda\cdot(f_1(s) + f_2(s)) \qquad\qquad \lambda\cdot f_1(s) + \lambda\cdot f_2(s)$$

uguali per distributive in $\mathbb{R}$.

<u>Oss</u>: Se $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ la funzione

$$\phi : \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(s_1) \\ \vdots \\ f(s_n) \end{pmatrix}$$

è una corrisp. biunivoca che rispetta le operazioni (esercizio).

Esercizio: 5 divide $8^n - 3^n$ $\forall n$

Per induzione: $n=0$ ($n=1$ ok). Passo induttivo:

supponiamo $8^n - 3^n = 5k$; esaminiamo

$$8^{n+1} - 3^{n+1} = (5+3)\cdot 8^n - 3\cdot 3^n$$
$$= 5\cdot 8^n + 3(8^n - 3^n)$$
$$= 5\cdot 8^n + 3\cdot 5k = 5(8^n + 3k)$$

OK.

CONSEGUENZE DELLA DEFINIZIONE

1. $v+0=v$ 2. $\forall v \; \exists (-v)$ t.c. $v+(-v)=0$

3. $v_1+(v_2+v_3)=(v_1+v_2)+v_3$ 4. $v_1+v_2=v_2+v_1$

5. $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot v)=(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot v$ 6. $\lambda\cdot(v_1+v_2)=\lambda\cdot v_1+\lambda\cdot v_2$

7. $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot v=\lambda_1\cdot v+\lambda_2\cdot v$ 8. $0\cdot v=0$ $1\cdot v=v$

Prop: $(-1)\cdot v=-v$

Dim: $(-1)\cdot v \underset{1}{=} (-1)\cdot v+0 \underset{2}{=} (-1)\cdot v+(v+(-v))$

$\underset{3}{=} ((-1)\cdot v+v)+(-v) \underset{8''}{=} ((-1)\cdot v+1\cdot v)+(-v)$

$$\underset{7}{=} \big((-1+1)\cdot v\big) + (-v) \underset{\uparrow}{=} (0 \cdot v) + (-v) \underset{8'}{=} 0 + (-v) \underset{1+4}{=} -v \qquad \boxtimes$$

scuole elementari

Morale: "qualsiasi uguaglianza sembri sensata è vera"

<u>Prop</u>: $v + w = z + w \implies v = z$

<u>Dim</u>: $v = v + 0 = v + \big(w + (-w)\big) = (v + w) + (-w)$

$$= (z + w) + (-w) = z + \big(w + (-w)\big) = z + 0 = z.$$

$\boxtimes$

Prop: $\lambda \cdot 0 = 0$

Dim:
$$\lambda \cdot 0 \underset{1}{=} \lambda \cdot (0+0) \underset{6}{=} \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$$
$$\parallel$$
$$0 + \lambda \cdot 0 \qquad \Longrightarrow \lambda \cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Prop: $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot v = 0 \Longrightarrow v = 0$.

Dim: $v = 1 \cdot v = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = 0$. $\boxed{///}$

Oss: per la associativa del $+$, in V scrivo

$$v_1 + \dots + v_n \qquad (\text{se } v_1, \dots, v_n \in V)$$

(non importa l'ordine delle somme).

Analogamente scrivo

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n}_{} = (\lambda_1 \cdot v_1) + \dots + (\lambda_n \cdot v_n)$$

↳ combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$ con coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

intendendo sia la espressione (scrittura) sia il suo risultato (un vettore):

$$\underbrace{3 \cdot 7 - 4 \cdot 5} = 1$$

Def: Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dico che un suo sottoinsieme W è un sottospazio vettoriale se

1. $0 \in W$
2. Se $w_1, w_2 \in W$ allora $w_1 + w_2 \in W$
3. Se $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W$ allora $\lambda \cdot w \in W$.

(Cioè: se è chiuso in V rispetto alle operazioni di sp. vett.)

↳ facendo le operazioni di V con el. di W si resta in W

<u>Oss</u>: Con le operazioni "ereditate" da V, W è uno spazio vettoriale.

<u>Oss</u>: Sapendo la 3. si può sostituire 1 con

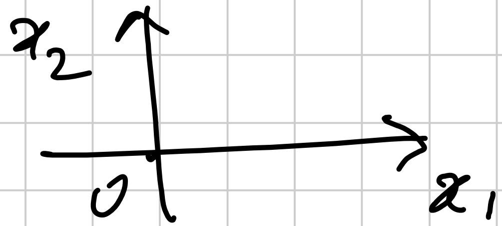
$\tilde{1}$: $W \neq \emptyset$. (In pratica conviene iniziare da 1.)

<u>Oss</u>: Si possono unificare 2 e 3 in

2+3. Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $w_1, w_2 \in W$ allora $\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 \in W$.

<u>Esercizio</u>: verificare che (2 e 3) $\Leftrightarrow$ 2+3.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$



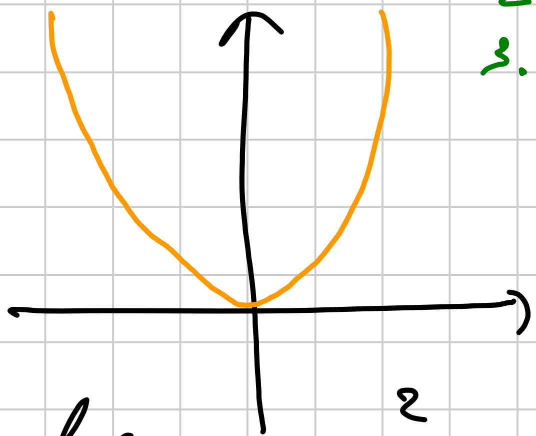
- $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 5x_2 = 4\}$

  No: 1 non vale

sottosp.

1. $0 \in W$
2. $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$
3. $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$

- $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}$



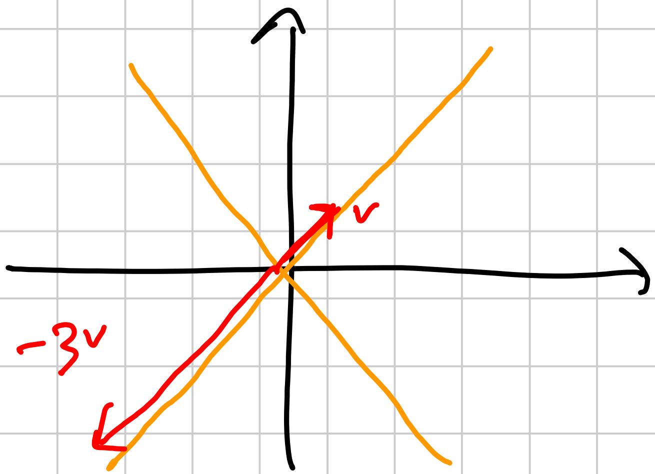
1. ✓
2. Sì se

$x_2 + y_2 = (x_1 + y_1)^2$ ogni volta che $x_2 = x_1^2$ e $y_2 = y_1^2$.

Falso: $\underset{\in W}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} + \underset{\in W}{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}} = \underset{\notin W}{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}}$ (No sottosp.)

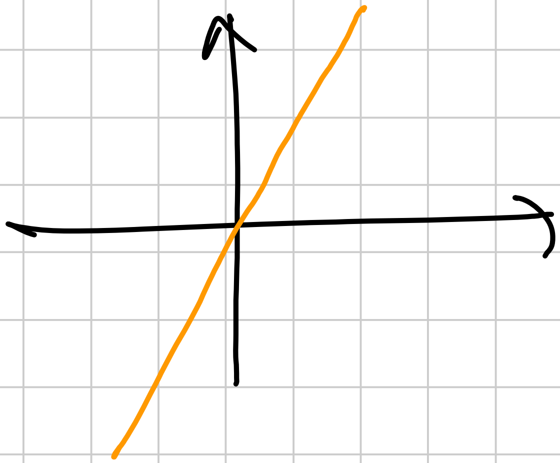
3. $2\cdot \underset{\in W}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \underset{\notin W}{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}$ No

• $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2^2\}$



1. ✓
2. $\underset{\in W}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} + \underset{\in W}{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} = \underset{\notin W}{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}$
3. ✓

- $\{x \in \mathbb{R}^2 : 5x_1 - 3x_2 = 0\} = W$



1. $5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in W$ ✓

2. $x, y \in W$, cioè

$$5 \cdot x_1 - 3x_2 = 0 \qquad 5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 = 0$$

allora

$$5 \cdot (x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) = (5x_1 - 3x_2) + (5y_1 - 3y_2)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

ho provato che $x+y \in W$ ✓

3. $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in W$ cioè $5x_1 - 3x_2 = 0$

$$5 \cdot \underbrace{(\lambda \cdot x_1)}_{\substack{\shortparallel \\ (\lambda \cdot x)_1}} - 3 \cdot \underbrace{(\lambda \cdot x_2)}_{\substack{\shortparallel \\ (\lambda \cdot x)_2}} = \lambda \cdot (5x_1 - 3x_2) = \lambda \cdot 0 = 0 .$$

ho provato che $\lambda \cdot x \in W$ ✓

$\Longrightarrow W$ è sottospazio.