Algebra lineare 1/10/13

Carlo Petronio + Paolo Lisca

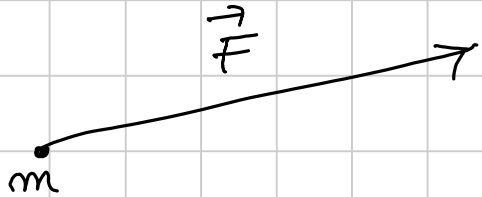
- Esercizi in rete in anticipo - PROVATECI!
- Libri di testo + queste lezioni in rete
- Ricevimento - devo fissarlo
- Orario esatto: Mart: 15:45 - 16:30 Merc 10:45 - 11:30
  16:45 - 17:30 11:45 - 13:15

MOTIVAZIONE:

Manipolazione di tipo algebrico (come per numeri, polinomi, espressioni.)
di oggetti geometrici
(punti, rette, piani...)

— o —

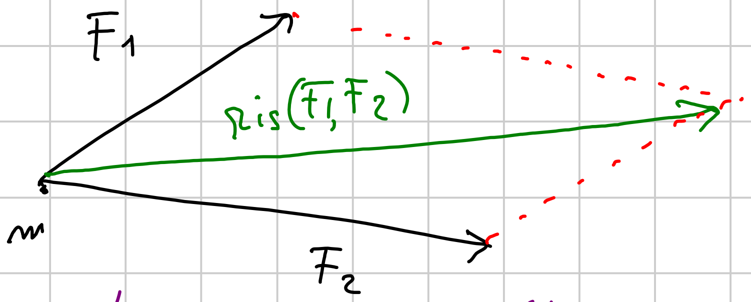
Esempio: forze applicate a un punto materiale.



$\vec{F}$:

- direzione
- verso
- intensità

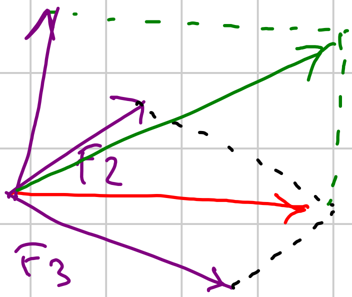
Risultante di due forze

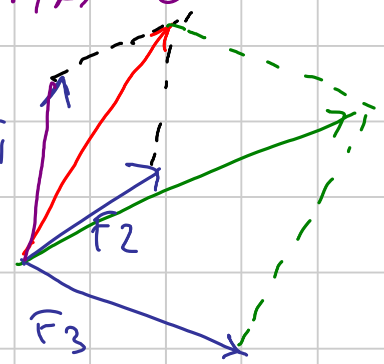


Proprietà operazione risultante

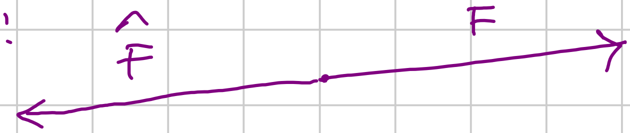
3. $ris(F_1, ris(F_2, F_3)) = ris(ris(F_1, F_2), F_3)$
4. $ris(F_1, F_2) = ris(F_2, F_1)$
1. Se O è la forza di intensità nulla ho $ris(O, F) = F \quad \forall F$
2. Dato F se $\hat{F}$ ha stessa direz. e intensità, e verso opposto,

(3: allora $\text{ris}(F, \hat{F}) = 0$





.)

(2: 

$= 0$.)

<u>OSS</u>: le proprietà 1-4 sono analoghe a quelle dell'addizione.

1. $0+x = x+0 = x \quad \forall x$ (0 el. neutro)

2. $\forall x \; \exists (-x)$ t.c. $x+(-x) = (-x)+x = 0$ (esistenza opposto)

3. $x+(y+z) = (x+y)+z$ (associativo)

4. $x+y = y+x$ (commutativo)

Scelta: invece che ris(F_1, F_2) scrivo $F_1 + F_2$

nuovo significato di +

Fatto: usare una simbologia unificata per oggetti diversi è utile per risolvere problemi.

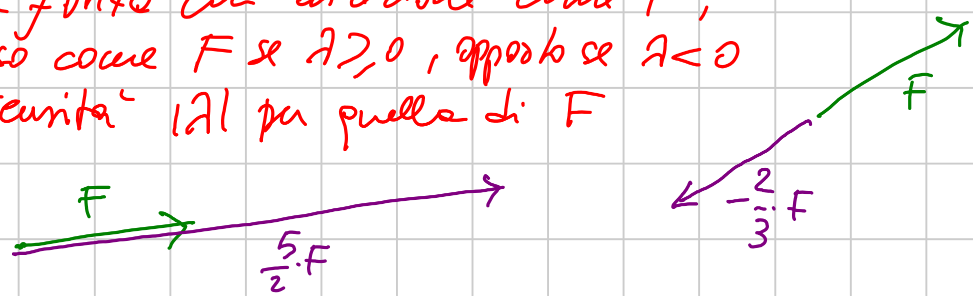
Altra "manipolazione" con le forze:

- $2F = F + F$; $\frac{1}{2}F =$ quella forza tale che $2(\frac{1}{2}F) = F$
cioè
la forza con stessa direz. e
verso di F ma intensità metà

$-F$ = l'opposta di F
$-7/4\, F$ = $7/4$ dell'opposta di F

$\lambda \cdot F$ = la forza con direzione come F, verso come F se $\lambda \geq 0$, opposto se $\lambda < 0$, intensità $|\lambda|$ per quella di F

nuovo



Proprietà: $\lambda \cdot (\mu \cdot F) = (\lambda \cdot \mu) \cdot F$ "associativa"

nuovi — vecchio — nuovo

$$\lambda \cdot (F_1 + F_2) = \lambda \cdot F_1 + \lambda \cdot F_2 \quad \left(= (\lambda \cdot F_1) + (\lambda \cdot F_2) \right)$$

tutti nuovi

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot F = \lambda_1 \cdot F + \lambda_2 \cdot F$$

vecchio — nuovi

"distributive"

$$1 \cdot F = F \qquad 0 \cdot F = 0$$

nuovo — nuovo: forze nulle

vecchio numero zero

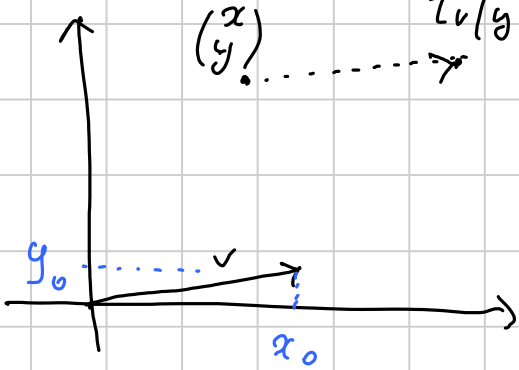
Esempio: Traslazioni e omotetie nel piano

Traslazione di vettore v:
espressione analitica

I_v : piano $\longrightarrow$ piano

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

$I_v\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$



Analizzando le proprietà dell'operazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

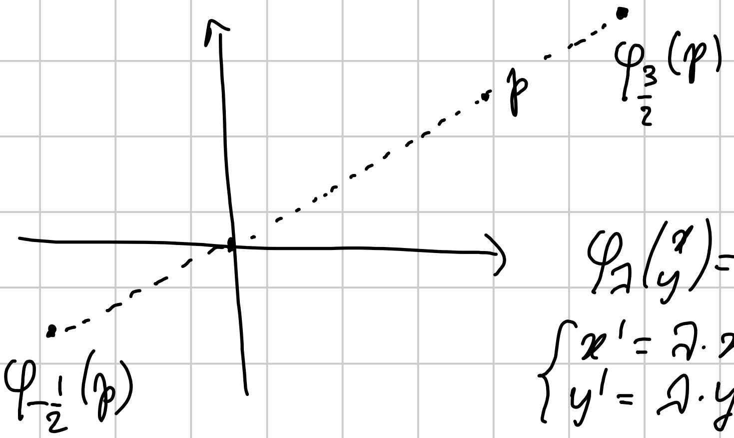
si vede che sono analoghe a quelle del + tra numeri:

Scelgo di indicare $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{\text{nuovo}}{+} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \end{pmatrix}$

1. Se $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha $0 + p = p \quad \forall p$
2. Se $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $-p = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ ho $p + (-p) = 0$
3. $p + (q + r) = (p + q) + r$
4. $p + q = q + p$ Esercizio: verificarlo

Omotetia di ragione λ:
φ_λ : piano $\to$ piano

$\varphi_\lambda(p) =$ il punto che sta sulla retta tra l'origine e p, con distanza dall'origine $|\lambda|$ quella di p, dalla stessa parte se $\lambda \geq 0$, dall'altra se $\lambda < 0$



Fatto:

$$\varphi_\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} x' = \lambda\cdot x \\ y' = \lambda\cdot y \end{cases}$$

MORALE:

$$+ : \text{piano} \times \text{piano} \longrightarrow \text{piano}$$
$$(p, q) \longmapsto p+q$$
$$\cdot : \text{numeri} \times \text{piano} \longrightarrow \text{piano}$$
$$(\lambda, p) \longmapsto \lambda\cdot p$$

Fatto: valgono le stesse 8 proprietà di prima

5. $\lambda \cdot (\mu \cdot p) = (\lambda \cdot \mu) \cdot p$
6. $\lambda (p_1 + p_2) = \lambda \cdot p_1 + \lambda \cdot p_2$
7. $(\lambda_1 + \lambda_2) p = \lambda_1 \cdot p + \lambda_2 \cdot p$
8. $1 \cdot p = p \,, \; 0 \cdot p = 0$

Oss: i due esempi in realtà sono lo stesso

forza F $\rightsquigarrow$ punto del piano p : metto l'origine nel primo estremo di F e chiamo p il secondo estremo

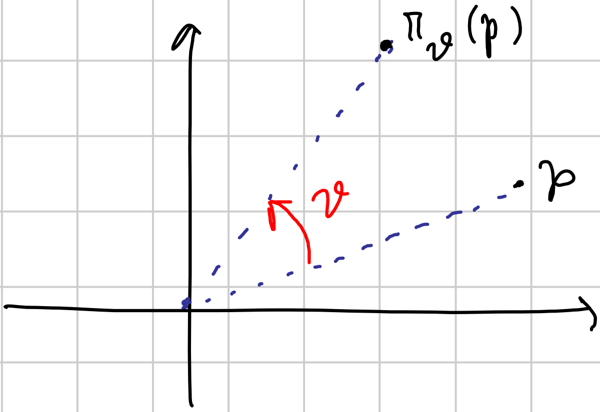
punto p del piano $\rightsquigarrow$ forza F : F forza con primo estremo O e secondo in p.

Fatto: questa corrispondenza rispetta le operazioni definite

— o —

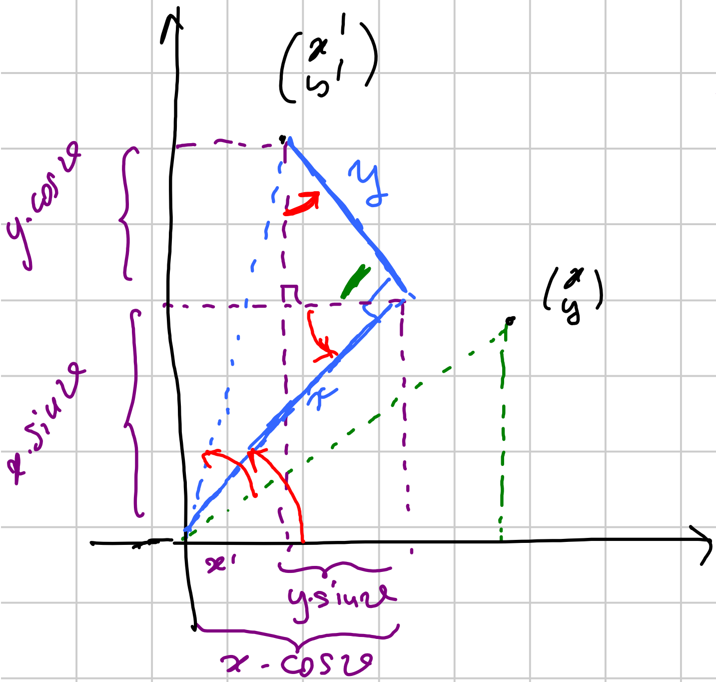
Anticipazioni:
- Rotazioni nel piano
- Numeri di Fibonacci

Rotazione di angolo ϑ



r_ϑ: piano $\to$ piano

Espressione analitica:



$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\vartheta - y \cdot \sin\vartheta \\ y' = x \cdot \sin\vartheta + y \cdot \cos\vartheta \end{cases}$$

Scommessa

scrivere

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\vartheta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con R_ϑ non un numero

Scelgo: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

con regole di moltiplicazione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

nuovissimo!

Oss: $(r_\vartheta \circ r_\varphi)(p) = r_\vartheta(r_\varphi(p)) = r_{\vartheta+\varphi}(p)$

(geometricamente è chiaro)

Algebricamente questo significa

$$R_\vartheta \cdot (R_\varphi \cdot p) = R_{\vartheta+\varphi} \cdot p$$

e il membro sinistro viene voglia di scriverlo come

$$(R_\vartheta \cdot R_\varphi)\, p$$

Super-nuovo!

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

Ora $R_\vartheta \cdot R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

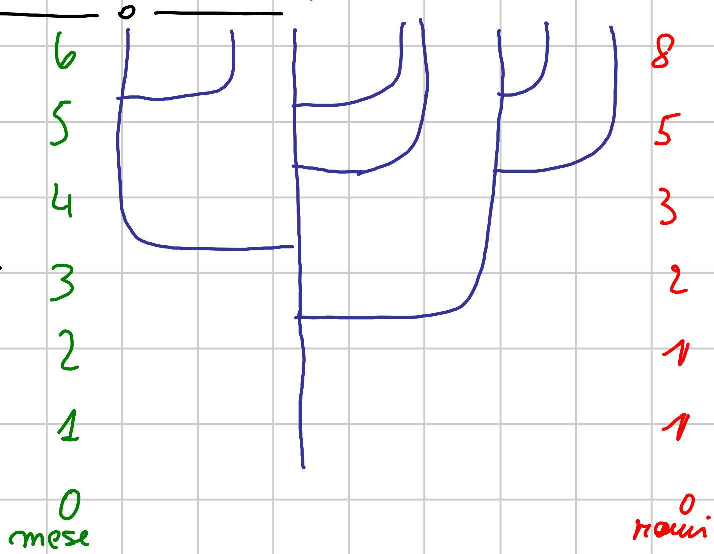
$$= \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi - \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\varphi) & -\sin(\vartheta+\varphi) \\ \sin(\vartheta+\varphi) & \cos(\vartheta+\varphi) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ viene davvero $R_{\vartheta+\varphi}$, dunque
l'operazione algebrica $\cdot$ introdotta ha
il significato geometrico di composizione

Numeri di Fibonacci:

pianto oggi (primo del mese) un seme;
a metà mese nasce un rametto, poi:
- nessun rametto muore mai
- ad ogni metà mese ogni rametto non appena nato getta un nuovo rametto



Se f_n = numero coppie del mese n si ha

$$f_0 = 0 \quad f_1 = 1 \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

quelli del mese prima

quelli nati il mese prima = quelli di due mesi prima

Con questa relazione il calcolo di f_n è lento.
Mentre è veloce con la formula (miracolosa!):

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Anzi: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618\ldots \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ grande per n grande

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.618 \Rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ piccolo per n grande

dunque

$$f_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{per } n \text{ grande}$$

Es: per $n = 8$ viene 21.0095 invece che 21

per $n = 20$ viene 6765.00003 invece che 6765