UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto dell'8/1/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} t^2+t-1 & t-1 \\ 1-t^2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \end{pmatrix}$.

3. Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dei luoghi
$\{[t+1 : -2t : 1-t] :\ t \in \mathbb{R}\}$ e $\{[-1-t : t+4 : t-2] :\ t \in \mathbb{R}\}$.

4. Per quali $t \in \mathbb{R}$ l'equazione $tx^2 + 2(t+1)xy + (5t-1)y^2 + x + 2y = 0$ definisce una parabola?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $-3x^2 + 3z^2 + 6xy - 6yz + 2y = 0$.

6. Determinare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = \cos(x-3y) - x\sin(x+y)$ e i segni dei suoi autovalori.

7. Posto $\omega(x,y) = (y^2 + \ln(2-x))\ \mathrm{d}x + (e^{-3y} + x(2y+1))\ \mathrm{d}y$
calcolare l'integrale di ω sul bordo di $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto dell'8/1/14 — Esercizî

1. Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & b & 2 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Provare $M + {}^{t}M$ ammette sempre una base ortonormale che la diagonalizza; per $a = -5$ e $b = 2$ esibire un autovalore di $M + {}^{t}M$ e un relativo autovettore unitario.

(B) (4 punti) Provare che $M \cdot {}^{t}M$ ammette sempre una base ortonormale che la diagonalizza e che gli autovalori sono non negativi; per $a = 11$ e $b = -3$ provare che uno di tali autovalori è nullo.

(C) (4 punti) Provare che esiste sempre una matrice ortogonale V tale che ${}^{t}V \cdot (M - {}^{t}M) \cdot V$ è una matrice A con due soli coefficienti non nulli; per $a = 2 + \sqrt{10}$ e $b = \sqrt{10} - 1$ esibire A.

2. Considerare la curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \ln(1+s) \\ s - s^2 \\ \sin(s) \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Trovare il più grande intervallo I su cui α è definita, e provare che α è semplice su I.

(B) (2 punti) Nel punto $s = 0$ trovare il riferimento di Frénet di α.

(C) (3 punti) Nel punto $s = 0$ trovare curvatura e torsione di α.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_{\beta} e^{x-y}(\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_{\gamma} z\,\mathrm{d}y$ dove γ è la restrizione di α a $[0, \pi]$

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $t \neq 0$

2. $\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \end{pmatrix}$

3. Il punto $[-2:3:1]$

4. $t = -\frac{1}{4}$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$; entrambi negativi

7. π

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $M + {}^{\mathrm{t}}M$ è simmetrica, dunque la prima parte segue dal teorema spettrale; per $a = -5$ e $b = 2$ si può scegliere $\lambda_1 = 2$ e $v_1 = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$; gli altri autovalori sono $\lambda_{2,3} = -3 \pm 2\sqrt{15}$ con autovettori unitarî relativi $v_{2,3} = \frac{1}{2\sqrt{195 \pm 45\sqrt{15}}}\begin{pmatrix} \pm 5\sqrt{15} - 19 \\ 5 \pm \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}$

(B) $M \cdot {}^{\mathrm{t}}M$ è simmetrica, dunque per il teorema spettrale ammette una base ortonormale che la diagonalizza; inoltre se λ è un autovalore e v è un autovettore relativo unitario si ha

$$\lambda = \lambda \cdot \|v\|^2 = \langle \lambda v | v \rangle = \langle M \cdot {}^{\mathrm{t}}M \cdot v | v \rangle = \langle {}^{\mathrm{t}}M \cdot v | {}^{\mathrm{t}}M \cdot v \rangle = \|{}^{\mathrm{t}}M \cdot v\|^2 \geqslant 0;$$

per $a = 11$ e $b = -3$ si ha $\det(M) = 0$, dunque $\det(M \cdot {}^{\mathrm{t}}M) = 0$, da cui segue che $M \cdot {}^{\mathrm{t}}M$ ha l'autovalore 0; gli altri due sono $77 \pm \sqrt{3571}$

(C) $M - {}^{\mathrm{t}}M$ è antisimmetrica, dunque per il teorema spettrale esiste una matrice V ortogonale tale che ${}^{\mathrm{t}}V \cdot (M - {}^{\mathrm{t}}M) \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove $\pm i\mu$ sono gli autovalori di $M - {}^{\mathrm{t}}M$; per $b = \sqrt{10} - 1$ (il valore di a non importa) si ha $\mu = 6$

2.

(A) $I = (-1, +\infty)$; la prima componente è crescente

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\tau = \frac{5}{6}$

(D) 1

(E) $2(1 - \pi)$