# Esercizî di Geometria (Petronio 12/13)

25 marzo 2013

**Esercizio 1**. Dati $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$. In quali ipotesi su $v_1, \ldots, v_n$ si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$?

**Esercizio 2**. Determinare la matrice $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ associata rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo alla proiezione ortogonale $p$ di $\mathbb{R}^4$ su $W = \mathrm{Span}(e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4, e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4)$, verificando che ${}^{\mathrm{t}}A = A^2 = A$.

**Esercizio 3**. Data $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che ${}^{\mathrm{t}}M \cdot M$ sia diagonale invertibile, determinare quante sono le matrici diagonali $D$ tali che $M \cdot D$ è una matrice ortogonale.

**Esercizio 4**. In $\mathbb{R}^4$ determinare una base ortogonale del sottospazio ortogonale a $\mathrm{Span}(3e_1 + e_2 - 5e_3 + 2e_4, -2e_1 + 4e_2 + 3e_3 - e_4)$.

**Esercizio 5**. In $\mathbb{C}^2$ considerare il prodotto scalare hermitiano standard. Determinare i vettori unitarî, con seconda componente immaginaria pura e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$.

**Esercizio 6**. In $\mathbb{C}^3$ considerare il prodotto scalare hermitiano standard. Determinare i vettori unitarî, con seconda componente reale, somma delle componenti nulla e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$.

**Esercizio 7**. Determinare la matrice $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ associata rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo alla proiezione ortogonale $p$ di $\mathbb{C}^2$ sul generato di $(2+i)e_1+(1-3i)e_2$, verificando che $A^* = A^2 = A$.

**Esercizio 8**. In $\mathbb{C}^2$ ortonormalizzare la base $\left( \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} \right)$.

**Esercizio 9**. In $\mathbb{C}^3$ calcolare la proiezione ortogonale di $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ sul generato $W$ di $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

**Esercizio 10**. Al variare di $k \in \mathbb{C}$ considerare $A_k = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & k \end{pmatrix}$ e la forma sesquilineare $f_k$ su $\mathbb{C}^2$ associata ad $A_k$.

(a) Stabilire per quali $k$ la $f_k$ è hermitiana.

(b) Stabilire per quali $k$ la $f_k$ è hermitiana e definita positiva, verificando che ciò accade per $k = 3$.

(c) Trovare un vettore di $\mathbb{C}^2$ con prima componente immaginaria pura che rispetto a $f_3$ sia unitario e ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$.

(d) Calcolare la proiezione ortogonale rispetto a $f_3$ di $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ sul generato di $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

(e) Ortonormalizzare rispetto a $f_3$ la base data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$.

**Esercizio 11**. Nello spazio vettoriale complesso $V$ con il prodotto scalare hermitiano assegnato trovare tutti i vettori $v$ con le proprietà indicate:

(a) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ standard, $v$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$, con prima coordinata reale

(b) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $v$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$, con somma delle coordinate immaginaria pura

(c) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{pmatrix}$, $v$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$, con prima coordinata reale

(d) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix}$, $v$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$, con somma delle coordinate immaginaria pura

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $v$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 3-i \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} 3+i \\ -2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ con somma delle coordinate reale

(f) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $v$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} 3+i \\ 1-i \\ -2i \end{pmatrix}$, con terza coordinata immaginaria pura

(g) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 5 \end{pmatrix}$, $v$ unitario, ortogonale a $e_1 + ie_3$ e a $2e_2 - ie_3$, con seconda coordinata reale

(h) $V = \mathbb{C}_{\leq 1}[z]$, $\langle p(z)|q(z)\rangle = p(1)\cdot\overline{q(1)} + p(i)\cdot\overline{q(i)}$, $v$ unitario, ortogonale a $i + (2-i)z$, con valore reale in $z = -i$

**Esercizio 12**. Nello spazio vettoriale complesso $V$ con il prodotto scalare hermitiano $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato esibire la proiezione ortogonale sul sottospazio $W$

indicato, verificando che è autoaggiunta rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle$ e che ha quadrato uguale a se stessa:

(a) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}\right)$

(b) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \{z \in \mathbb{C}^2 : \ (1-i)z_1 + (2+i)z_2 = 0\}$

(c) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \\ 3-2i \end{pmatrix}\right)$

(d) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \{z \in \mathbb{C}^3 : \ iz_1 + (1-2i)z_2 + (3+i)z_3 = 0\}$

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -4 \\ 3-i \end{pmatrix}\right)$

(f) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard,
$W = \{z \in \mathbb{C}^3 : \ z_1 + 2z_2 + iz_3 = 0, \ (2-i)z_1 + 2iz_2 - z_3 = 0\}$

(g) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}\right)$

(h) $V = \mathbb{C}_{\leq 1}[z]$, $\langle p(z)|q(z)\rangle = p(2)\cdot\overline{q(2)} + 2p(-i)\cdot\overline{q(-i)}$,
$W = \mathrm{Span}(1-2i+(3+i)z)$.

**Esercizio 13**. Determinare gli autovalori dell'applicazione lineare $f$ assegnata o dell'applicazione lineare associata alla matrice $A$ assegnata:

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{5}(7+i) \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $f : V \to V, \quad V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$,
$f(x) = \begin{pmatrix} -3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$

(h) $f : V \to V, \quad V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t], \quad f(p(t)) = p(3) + p(-2) \cdot t$

(i) $f : V \to V, \quad V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : \ p(1) = 0\}$,
$f(p(t)) = (t-1) \cdot p'(t) + (t^2 - 1) \cdot p(-2)$

**Esercizio 14**. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale tale che $f(W) \subseteq W$. Sia $g : W \to W$ l'applicazione lineare data da $g(w) = f(w)$ per ogni $w \in W$. Provare che il polinomio caratteristico di $f$ è multiplo di quello di $g$.

**Esercizio 15**. Siano $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Determinare quali $\lambda \in \mathbb{K}$ possono essere autovalori di una tale $f$, e descrivere tutte le $f$ siffatte che sono diagonalizzabili.

**Esercizio 16**. Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che qualsiasi matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha almeno un autovalore reale.

**Esercizio 17**. Stabilire che legame intercorre tra la diagonalizzabilità su $\mathbb{K}$ di $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e della sua trasposta ${}^{\mathrm{t}}A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

**Esercizio 18**. Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che il polinomio caratteristico $p_A(t)$ ha $n$ radici reali (contate con la molteplicità), e diagonalizzabile come matrice complessa, cioè tale che esiste $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diagonale. Provare che $A$ è diagonalizzabile come matrice reale.

**Esercizio 19**. Sia $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con tutti i coefficienti positivi. Provare che gli autovalori di $A$ sono distinti e che $A$ ha un autovettore con le coordinate concordi e uno con le coordinate discordi.

**Esercizio 20**. Discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$ della matrice assegnata, al variare del parametro $k$ quando presente:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 2k-1 & 2-k \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 2-k & 3k-2 \\ 1 & 2k-1 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} k+1 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(m) $\begin{pmatrix} k^2 & 2(1-k) & k-1 \\ k+1 & -k-2 & 1 \\ 2(k+1) & -4(k+1) & k+2 \end{pmatrix}$

(n) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3k \\ 1 & 0 & 3k & 1 \end{pmatrix}$