Esercizî di Geometria (Petronio 12/13)

21 maggio 2013

Esercizio 0. Provare che se v e w sono vettori di $\mathbb{R}^3$ si ha

$$(v \wedge w) \wedge v = \|v\|^2 \cdot w - \langle w|v\rangle \cdot v.$$

Esercizio 1. Per la curva α assegnata trovare il riferimento di Frénet, la curvatura e la torsione nel punto $\alpha(s_0)$ con s_0 indicato:

(a) $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s \cdot \cos(s) \\ 1 + s^2 \\ \log(1+s) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = 0$

(b) $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 1 + 2s + s^2 - s^3 \\ e^{2s} \\ \sin(s) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = 0$

(c) $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 3s + s^3 \\ s \cdot \log(s) \\ \cos(\pi \cdot s) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = 1$

(d) $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \sin^2(s) \\ \tan(2s) \\ s^2 + \cos(s) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = \frac{\pi}{2}$

Esercizio 2. Verificare che la 1-forma ω assegnata è esatta e che è definita su sottoinsieme Ω semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$, quindi trovare un potenziale U di α:

(a) $\omega(x, y) = -5x^2y(3y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$

(b) $\omega(x,y) = e^y \left(\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \log(x)\,\mathrm{d}y\right)$

(c) $\omega(x,y) = (2x + y\sin(xy))\,\mathrm{d}x + (x\sin(xy) - 1)\,\mathrm{d}y$

(d) $\omega(x,y) = \frac{\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y}{x - y^2}$

(e) $\omega(x,y) = y\sin(x)\,\mathrm{d}x + (\cos(y) - \cos(x))\,\mathrm{d}y$

Esercizio 3. Calcolare $\int\limits_\alpha \sqrt{1+y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Considerare l'insieme

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \log(1 + x\cos(y)) + \cos(x) = 1\right\}.$$

Provare che C contiene $(0,0)$ e che è una curva vicino a $(0,0)$, quindi trovare la retta tangente a C in $(0,0)$.

Esercizio 5. Per quali $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la 1-forma $\omega(x,y) = f(x,y)\,\mathrm{d}y$ è chiusa?

Esercizio 6. Calcolare l'area della regione delimitata dal supporto della curva $\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$ e da un segmento sull'asse delle ascisse.

Esercizio 7. Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato con bordo che è unione di curve, e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette derivate parziali continue, si può concludere che $\int\limits_{\partial A} \mathrm{d}f$ si annulla?

Esercizio 8. Calcolare $\int\limits_{\partial Q} ((x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (2xy + e^y)\,\mathrm{d}y)$

con $Q = [0,1] \times [0,1]$

Esercizio 9. Confrontare tra loro le lunghezze delle seguenti curve:

$$\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2),$$

$$\beta : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \beta(t) = (\sin(2t), \cos(2t), 4t^2).$$

Esercizio 10. Se ω_0, ω_1 sono 1-forme su $\mathbb{R}^2$ e $\mathrm{d}\omega_0 = \mathrm{d}\omega_1$, come sono legate tra loro ω_0 e ω_1?

Esercizio 11. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la 1-forma

$$(x + ky^2)\,\mathrm{d}x + (xy - k^2y^2)\,\mathrm{d}y$$

ammette un potenziale su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 12. Calcolare $\int_\alpha \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = (t\cos(t), t\sin(t)).$$

Esercizio 13. Calcolare $\int_\alpha (\cos(y)(\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}z) - (x+z)\sin(y)\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \left(t, \sin\left(\frac{t^2}{\pi}\right), t(t-\pi)\right).$$

Esercizio 14. Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2xy^2 + 3x^2y = 1\}$ esistono punti di C nei quali il vettore $(-1,4)$ è tangente a C?

Esercizio 15. Calcolare $\int_{\partial\Delta} (\cos(e^y)\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ con $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 16. Calcolare $\int_{\partial A} x\,\mathrm{d}y$ con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| \leqslant 1, \; 0 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}$.

Esercizio 17. Calcolare $\int_\alpha x$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t, t^2)$.

Esercizio 18. Posto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 9x^2 + 4y^2 \leqslant 36\}$ parametrizzare ∂A con la giusta orientazione.

Esercizio 19. Calcolare $\int_\alpha xy$ con $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = (\sin(t), 2\cos(t)).$$