Esercizî di Geometria (Petronio 12/13)

21 aprile 2013

Esercizio 1. Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & 5 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Determinare i segni degli autovalori della matrice assegnata:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -3 & 1+4i \\ 1-4i & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 0 & 1+i \\ -1 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Provare che la funzione f assegnata ha un punto critico nell'origine 0, determinare la matrice hessiana di f in 0 e stabilire se f sia un punto di massimo o di minimo relativo per f:

(a) $f(x,y) = x^2 \cdot \cos(xy) + 2y^2 - 3xy$

(b) $f(x,y) = x \cdot \ln(1+x) + 3\sin^2 y + x^2$

(c) $f(x,y) = e^{xy} \cdot \cos(2x - y) - 2xy$

Esercizio 4. Stabilire se la matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ assegnata sia normale e in caso affermativo determinare i suoi autovettori e una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ che la diagonalizza.

(a) $\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1-5i & -6i \\ 3i & 1+4i \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix}$

Esercizio 5. Verificare che la matrice assegnata è unitaria.

(a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -i \\ -i\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ i & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i & \sqrt{2}\cdot(i-1) & i-3 \\ \sqrt{2}\cdot(i-1) & 2\cdot(1+i) & -\sqrt{2}\cdot(1+i) \\ 3-i & \sqrt{2}\cdot(1+i) & 1-i \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Determinare la forma canonica, su $\mathbb{R}$ quando ha senso e altrimenti su $\mathbb{C}$, della matrice assegnata:

(a) $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -i & i+\sqrt{3} \\ i-\sqrt{3} & 2i \end{pmatrix}$

Esercizio 7. Classificare a meno di trasformazioni affini la conica (anche se degenere) definita dall'equazione assegnata, discutendo rispetto a k quando presente:

1. $x^2 + 2xy - y^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$
2. $2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y - 3 = 0$
3. $5x^2 - 4xy + 7y^2 + 4x - 3y - \sqrt{11} = 0$
4. $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x - 5y - 19 = 0$
5. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2y = 0$
6. $x^2 - 2xy - 2x + 1 = 0$
7. $9x^2 + 6xy + y^2 - \sqrt{10}x + 3\sqrt{10}y = 0$
8. $3x^2 - 6xy + 6y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
9. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 5y + \sqrt{5} = 0$
10. $4x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x - y + 22 = 0$
11. $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$

12. $2x^2 - 2xy + y^2 + 2y + 1 = 0$

13. $5x^2 - 4xy + y^2 + 2y + 4\sqrt{2} = 0$

14. $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$

15. $xy + x - 3y + 4 = 0$

16. $x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 7 = 0$

17. $3x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$

18. $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$

19. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

20. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$

21. $23x^2 - 8xy + 17y^2 - 75 = 0$

22. $2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + 6y + 5 = 0$

23. $x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

24. $4x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 4y = 0$

25. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 4 = 0$

26. $x^2 - \sqrt{2}xy + 4y^2 + \sqrt{5} = 0$

27. $2x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 10y + 10 = 0$

28. $6xy + 3y^2 - 2x + 2y + 9 = 0$

29. $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20x - 40y = 0$

30. $37x^2 - 18xy + 13y^2 + 92x - 44y + 28 = 0$

31. $7x^2 - 6xy - y^2 + 20x - 4y + 14 = 0$

32. $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 = 0$

33. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - k = 0$

34. $x^2 + kxy - 3y^2 + 2x + y - 1 = 0$

35. $kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$

36. $x^2 - 2xy + 2ky^2 + 2kx + 2y + 1 = 0$

37. $(k+1)x^2 + (k-1)y^2 + 2kx + 2y - 1 = 0$

38. $kx^2 + 2\sqrt{k}xy + 3y^2 + 2\sqrt{k}x + k = 0$

39. $x^2 - 2kxy + 4y^2 - 4x + 6y + \frac{13}{3} = 0$

Esercizio 8. Provare che tagliando il nastro di Möbius a metà lungo la sua curva centrale si ottiene una sola superficie e non due. Che superficie è? E cosa succede facendo due tagli paralleli tra loro e paralleli alla curva centrale?

Esercizio 9. Verificare che la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 4x - 18y + 4 = 0$ è un'ellisse. Determinare una trasformazione affine f di $\mathbb{R}^2$ che trasformi $\mathcal{C}$ nell'ellisse di equazione $x^2 + y^2 = 1$, e una isometria g di $\mathbb{R}^2$ che trasformi $\mathcal{C}$ in un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b > 0$, determinando a e b.

Esercizio 10. Determinare i possibili tipi affini di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito da un'equazione $(x\ y\ 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, con $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simmetrica avente determinante nullo.

Esercizio 11. Descrivere il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito dall'equazione $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$ e i suoi punti all'infinito.

Esercizio 12. Esibire un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$ definito da un'equazione di terzo grado, che abbia tre punti distinti all'infinito e che non contenga alcuna retta.

Esercizio 13. Provare che due rette proiettive distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ hanno sempre esattamente un punto di intersezione e interpretare geometricamente il risultato con riferimento alla posizione reciproca di due rette affini in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 14. Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ degli insiemi

$$\{[t-1 : t^2 - 4 : -t] :\ t \in \mathbb{R}\},$$

$$\{[1-3t^2 : 1+t : 1+3t^2] : \; t \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 15. Determinare i punti all'infinito dell'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \; \left(x_1 + x_2 - (x_1+x_2)^2\right) \cdot (x_1x_2 + 1) \cdot \left(x_1 - \sqrt{\pi}\right) \cdot \left(x_1^2 + 17x_2\right)\right\}.$$

Esercizio 16. Determinare il tipo affine della quadrica Q di equazione $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 + 2x_2 = 1$. Identificato $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con l'insieme dei punti all'infinito di $\mathbb{R}^3$, individuare l'intersezione di $\{[3-t : 2t-5 : 2t-3] : \; t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito di Q.

Esercizio 17. Sia $\ell \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una retta proiettiva. Provare che esistono $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tali che la funzione $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \ell$ data da

$$f([t_0 : t_1]) = [t_0v_0 + t_1v_1]$$

è ben definita ed è una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e ℓ.