

Esercizi di Geometria (Petronio 12/13)

20 maggio 2013

Esercizio 1. Determinare il tipo affine della quadrica assegnata, discutendolo al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ se presente:

(a) $2x^2 - y^2 + z^2 + 4xz + 2yz - 2x + 6y - 2z = 0$

(b) $x^2 + 3y^2 + 4xy - 2xz - 2yz - 4x - 3 = 0$

(c) $2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6xy - 2xz + 4yz - 4y + 2z - 1 = 0$

(d) $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4yz + 6z = 0$

(e) $x^2 + y^2 - 4xz + 6yz + 2x + 4z = 0$

(f) $-x^2 + y^2 - 4xy + 6yz - 2x + 4z = 0$

(g) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 4yz - 4x + 2y = 0$

(h) $x^2 - y^2 - 5z^2 - 2xy + 4xz + 2y - 4 = 0$

(i) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 4xy - 2xz - 2x - 2y + 1 = 0$

(j) $2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - 2y = 0$

(k) $y^2 + 3z^2 + xy + 3xz + 4yz + y = 0$

(l) $-xy + 2xz + yz + x + 2 = 0$

(m) $x^2 + 5y^2 + (2k^2 + 9)z^2 + 2xy - 2kxz + 2kyz - 1 = 0$

(n) $x^2 + (k^2 + 1)y^2 + (k^2 + 2)z^2 - 2kxy + 2xz - 4kyz - 1 = 0$

(o) $x^2 + (k^2 - 1)y^2 - k^2z^2 + 2kxy - 2kyz - 4x - 4ky - 2z + 4 = 0$

(p) $x^2 + 2y^2 + (k^2 - 1)z^2 + 2xy + 2kyz - 2x - 2y + 1 - k = 0$

(q) $x^2 + (k^2 + k)y^2 + (k + 1)z^2 - 2kxy + 2kyz - 4x + 4ky + 2kz + k^2 + 3 = 0$

(r) $x^2 + (k^2 + k)y^2 + z^2 + 2kxy + 2kyz + 4x + 4ky - 2z + 4 - 2k = 0$

Esercizio 2. Sia $\alpha : [\frac{\pi}{2}, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che α è semplice e ha lunghezza infinita. Trovare la funzione $\tau : [0, +\infty) \rightarrow [\frac{\pi}{2}, \pi)$ tale che $\alpha \circ \tau$ sia in parametro d'arco. Calcolare la curvatura di α in ogni suo punto.

Esercizio 3. Dati $r, \lambda > 0$ trovare $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\alpha(0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ che parametrizzi il luogo definito nelle coordinate polari (ρ, ϑ) dall'equazione $\rho = r \cdot e^{\lambda \cdot \vartheta}$. Trovare $\tau : (s_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\tau(0) = 0$ tale che $\alpha \circ \tau$ sia in parametro d'arco. Calcolare la curvatura di α in ogni suo punto.

Esercizio 4. Calcolare in ogni punto la curvatura e la torsione della curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) \\ 1 - \sin(t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Data $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva e derivabile due volte trovare in funzione di ρ il parametro d'arco e la curvatura della curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \rho(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Calcolare $\int_{\alpha} xy^2$ con $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Esercizio 7. Calcolare $\int_{\alpha} \sqrt{12 + x}$ con $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 + t^3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Calcolare $\int_{\alpha} (2xy^2 \, dx + 3x^2y \, dy)$ con $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 1 + t^2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Calcolare $\int_{\alpha} (x \, dy - y \, dx)$ con $\alpha : [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Calcolare $d \left(e^{x+\cos(y)} \cdot \log \frac{\cos x}{y} \right).$

Esercizio 11. Calcolare $d(e^{xy} \cos(x) \, dx + e^{x-y} \sin(xy) \, du).$