Esercizî di Geometria (Petronio 12/13)

13 marzo 2013

Esercizio 1. Provare che per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)\,.$$

(Determinante di Vandermonde.)

Esercizio 2. Dedurre dall'esercizio precedente che dati nel piano $\mathbb{R}^2$ punti $P_1, \ldots, P_n$ con ascisse distinte esiste uno e un solo polinomio di grado al più $n-1$ il cui grafico contiene $P_1, \ldots, P_n$. (Interpolazione polinomiale.)

Esercizio 3. Calcolare l'angolo formato dai vettori v e w assegnati nello spazio euclideo standard di dimensione oppurtuna:

(a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Verificare che nello spazio $C^0([0,1],\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ i vettori S e C dati da

$$S(t) = \sin(2\pi t) \qquad C(t) = \cos(2\pi t)$$

sono ortogonali tra loro e hanno la stessa norma, trovandone il valore.

Esercizio 5. Calcolare l'angolo formato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nello spazio $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr}({}^{t}B \cdot A)$.

Esercizio 6. Nello spazio $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ dotato del prodotto scalare

$$\langle p(t)|q(t)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

determinare un polinomio di norma $\sqrt{5}$ ortogonale a $1+t$ e a $1+t^2$.

Esercizio 7. Stabilire se l'applicazione f assegnata sia bilineare, in tal caso se sia simmetrica, in tal caso se sia definita positiva:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 7x_1y_2 + 8y_1y_2 - 5x_2y_1$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = -3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + 7x_2y_2$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

(f) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_3y_3$

(g) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 2x_3y_3$

(h) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$

Esercizio 8. Stabilire per quali delle matrici A assegnate si ha che $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è un prodotto scalare:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{\pi} \\ 5 & 3 & -1781 \\ \sqrt{\pi} & -1781 & e \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

(h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 9. Caratterizzare le matrici $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ per le quali $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è un prodotto scalare.

Esercizio 10. Nello spazio $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con A assegnata determinare una base del sottospazio ortogonale rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ ai vettori indicati:

(a) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

(c) $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 11. Data $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definire B ponendo $b_{i\,j} = (-1)^{i+j} \cdot a_{i\,j}$. Provare che S definisce un prodotto scalare se e soltanto se lo fa B.

Esercizio 12. Provare che le funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ date da

$$\mathrm{SNCF}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono linearmente dipendenti} \\ \|x\| + \|y\| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathrm{NYC}(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

soddisfano le tre proprietà delle funzioni distanza. Spiegare inoltre perché si chiamano come si chiamano.

Esercizio 13. Nello spazio V con il prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato ortonormalizzare il sistema di vettori dato:

(a) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ -1789 \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(f) $V = C^0([0,1], \mathbb{R}) \qquad \langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad u(t) = t - 2t^2,\ v(t) = t$

(g) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \qquad \langle p(t)|q(t)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2)$
$u(t) = t - 2t^2,\ v(t) = t$

Esercizio 14. Nello spazio V con il prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato esibire la proiezione ortogonale sul sottospazio W indicato:

(a) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot x \qquad W = \{x:\ 4x_1 - 3x_2 = 0\}$

(b) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x \qquad W = \{x:\ 4x_1 - 3x_2 = 0\}$

(c) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot x \qquad W = \{x:\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$

(d) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{t}y \cdot x \qquad W = \{x:\ 3x_1 + 2x_2 = 3x_2 - 5x_3 = 0\}$

(e) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$
$W = \{x:\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$

(f) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$
$W = \{x:\ 3x_1 + 2x_2 = 3x_2 - 5x_3 = 0\}$

(g) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \qquad \langle p(t)|q(t)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2)$
$W = \mathrm{Span}(t, t^2)$

Esercizio 15. Trovare tutte le matrici X che definiscono applicazioni autoaggiunte rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con A assegnata e che soddisfano le ulteriori richieste eventualmente indicate:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{tr}(X) = 0 \qquad {}^{\mathrm{t}}X = X$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad {}^{\mathrm{t}}X + X = 0$

Esercizio 16. Sullo spazio $\mathbb{R}^3$ considerare il prodotto scalare standard. Esibire la matrice che rappresenta la trasformazione descritta e verificare che è ortogonale:

(a) La riflessione f rispetto al piano di equazione $2x - 3y + 4z = 0$

(b) Una delle due rotazioni g di angolo $\frac{\pi}{6}$ intorno a Span $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $f \circ g$

(d) $g \circ f$