Eserciziî di Algebra Lineare (Petronio 12/13)

29 ottobre 2012

Esercizio 1 Verificare che l'applicazione assegnata è lineare ed esibirne nucleo e immagine, verificando la formula della dimensione.

(a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ -2x_1 + 5x_3 + 7x_3 \end{pmatrix}$

(b) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2 + 11x_3 \end{pmatrix}$

(c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(d) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(e) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(f) $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$

(g) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 \end{pmatrix}$

(h) $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad f(A) = A + {}^{\mathrm{t}}A$

(i) $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad f(A) = A - {}^{\mathrm{t}}A$

(j) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \quad f(A) = \begin{pmatrix} a_{1\,1} - 3a_{1\,2} \\ 2a_{2\,1} + a_{1\,2} \\ -a_{1\,1} + 5a_{2\,2} \end{pmatrix}$

(k) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 & x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 + 2x_3 & x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

(l) $f : \mathbb{R}_{\leqslant d}[t] \to \mathbb{R}_{\leqslant d}[t], \quad f(p(t)) = p'(t)$

(m) $f : \mathbb{R}_{\leqslant 3}[t] \to \mathbb{R}^2, \quad f(p(t)) = \begin{pmatrix} p(2) - p'(-1) \\ p(1) + 2p''(2) \end{pmatrix}$

(n) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t]$,
$f(x) = (x_1 + 3x_2 - x_4) + (x_2 + 2x_3 - x_4)t + (x_1 - 6x_3 + 2x_4)t^2$