

Esercizi di Algebra Lineare (Petronio 12/13)

29 settembre 2012

Esercizio 1 (Usando il principio di induzione) verificare il principio di *induzione completa*: per provare che un predicato $P(n)$ relativo a un naturale n è vero per ogni n , basta compiere i seguenti passi:

- Dimostrare che $P(0)$ è vero;
- Supponendo $P(j)$ vero per ogni j naturale compreso tra 0 e n , dove n è un generico naturale, dimostrare che anche $P(n+1)$ è vero.

Esercizio 2 (Usando l'Esercizio 1) dimostrare che ogni numero naturale è prodotto di numeri primi.

Esercizio 3. (Per assurdo, usando l'Esercizio 2) dimostrare che esistono infiniti numeri naturali primi.

Esercizio 4. (Usando il principio di induzione completa) dimostrare il *principio del minimo*: se $X \subset \mathbb{N}$ è non vuoto, allora ammette un elemento minimo, cioè esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m \in X$ e $m \leq x$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 5. (Usando il principio del minimo) dimostrare la regola di divisione euclidea per i numeri interi: per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$ esistono unici $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che $n = m \cdot q + r$ e $0 \leq r < m$.

Esercizio 6. (Usando il principio del minimo) dimostrare la regola di divisione per i polinomi: per ogni $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $\deg(g(x)) > 0$ esistono unici $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}$ tali che $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x))$.

Esercizio 7. Provare che se $(F_n)_{n=0}^{+\infty}$ è la successione di Fibonacci, definita dalle relazioni

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

allora

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Esercizio 8. Verificare che $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ è intero per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi provare che

$$\sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 9. Considerare l'insieme $F_2 = \{0, 1\}$ con le operazioni $\oplus$ e $\odot$ definite come segue:

- $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$
- $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0, \quad 1 \odot 1 = 1.$

Provare che F_2 con tali operazioni è un campo.

Esercizio 10.

- (Per induzione su n) stabilire che se X e Y sono insiemi finiti con lo stesso numero n di elementi e $f : X \rightarrow Y$ è una funzione iniettiva, allora f è anche surgettiva;
- (Usando il fatto precedente) stabilire che se X e Y hanno lo stesso numero finito di elementi e $f : X \rightarrow Y$ è una funzione surgettiva, allora f è anche iniettiva.

Dedurre dai fatti precedenti che se X è un insieme finito e $f : X \rightarrow X$ è una funzione, allora f è iniettiva se e soltanto se è surgettiva.

Esercizio 11. Dato $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ sull'insieme $F_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ considerare le operazioni $\oplus$ e $\odot$ definite come segue:

- $a \oplus b$ è il resto della divisione euclidea $(a + b) : n$
- $a \odot b$ è il resto della divisione euclidea $(a \cdot b) : n$.

(Usando l'Esercizio 10) provare che F_n con tali operazioni è un campo se e soltanto se n è primo.

Esercizio 12. Date $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e posto $F = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}$ e $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = 0\}$ trovare $u, i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$F \cup G = \{x \in \mathbb{R}^2 : u(x) = 0\}, \quad F \cap G = \{x \in \mathbb{R}^2 : i(x) = 0\}.$$