Esercizî di Algebra Lineare (Petronio 12/13)

25 novembre 2012

Esercizio 1. Dati V e W spazî vettoriali di dimensioni n e m rispettivamente, $X \subset V$ e $Y \subset W$ sottospazî di dimensioni h e k rispettivamente, porre

$$U = \{f \in \mathcal{L}(V,W) : \ f(X) \subset Y\}.$$

Provare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(V,W)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 2. Dati A, B, C, D spazî vettoriali di dimensioni a, b, c, d rispettivamente e applicazioni lineari $u : A \to B$ e $v : C \to D$ aventi dimensione dell'immagine rispettivamente p e q, porre

$$U = \{f \in \mathcal{L}(B,C) : \ v \circ f \circ u = 0\}.$$

Provare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(B,C)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 3. Date $P \in \mathcal{M}_{a\times b}(\mathbb{R})$ con $\mathrm{rank}(P) = p$ e $Q \in \mathcal{M}_{c\times d}(\mathbb{R})$ con $\mathrm{rank}(Q) = q$ porre

$$U = \{F \in \mathcal{M}_{b\times c}(\mathbb{R}) : \ Q \cdot F \cdot P = 0\}.$$

Provare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{b\times c}(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 4. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 5. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$ tale che

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 4a_{1\,1} + 7a_{1\,2} & 5a_{1\,1} - 6a_{1\,2} \\ 4a_{2\,1} + 7a_{2\,2} & 5a_{2\,1} - 6a_{2\,2} \\ 4a_{3\,1} + 7a_{3\,2} & 5a_{3\,1} - 6a_{3\,2} \end{pmatrix}$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 7. Determinare la base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$[f_A]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2a_{1\,1} + 5a_{2\,1} & -2a_{1\,2} + 5a_{2\,2} & -2a_{1\,3} + 5a_{2\,3} \\ 3a_{1\,1} - 7a_{2\,1} & 3a_{1\,2} - 7a_{2\,2} & 3a_{1\,3} - 7a_{2\,3} \end{pmatrix}$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 8. In $\mathbb{R}^2$ considerare le basi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ determinare $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$.

Esercizio 9. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - 2z = 1 \\ (1+t)x + 3y + z = t \\ 7x + 12y + 2tz = -1. \end{cases}$$

Esercizio 10. Determinare la segnatura della permutazione assegnata:

(a) $(4\,3\,1\,2) \in \mathfrak{S}_4$

(b) $(4\,1\,5\,2\,3) \in \mathfrak{S}_5$

(c) $(3\,6\,1\,5\,2\,4) \in \mathfrak{S}_6$

(d) $(5\,4\,1\,7\,2\,3\,6) \in \mathfrak{S}_7$

Esercizio 11. Calcolare $\det \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 12. Data $A = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile, considerare la matrice B indicata e calcolare $\frac{\det(B)}{\det(A)}$.

(a) $n = 2, \quad B = (3v_1 - 2v_2,\ -5v_1 + 4v_2)$

(b) $n = 3, \quad B = (v_2 - v_3,\ 2v_1 + v_3,\ -v_1 + 2v_2 + 3v_3)$

(c) $n = 4, \quad B = (v_3 - v_1,\ v_1 - 3v_4,\ 2v_2 + v_4,\ v_3 - 2v_4)$

Esercizio 13. Calcolare l'inversa della matrice assegnata:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1+t & t-9 \\ 1-t & t \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$