

Esercizi di Algebra Lineare (Petronio 12/13)

18 novembre 2012

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale V dato considerare le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ ed esibire le matrici di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, verificando che sono l'una l'inversa dell'altra.

$$(a) \quad V = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$(b) \quad V = \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$
$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(c) \quad V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$(d) \quad V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(-1) = 0\},$$
$$\mathcal{B} = (1+t, 1-t^2), \quad \mathcal{B}' = (1+2t+t^2, 2-t-3t^2)$$

Esercizio 2. Verificare la formula di cambiamento di base per le coordinate di un vettore nel caso dello spazio vettoriale $\{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0\}$, del vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e delle basi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 3. Verificare la formula di cambiamento di base per la matrice associata a un'applicazione lineare nel caso dell'applicazione

$$f : \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 5x_3 - x_2 \\ 3x_1 + x_3 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 4. Risolvere il sistema lineare assegnato (ovvero **trovarne tutte le soluzioni**):

$$(a) \begin{cases} 2x - y + 3z = 26 \\ -3x + 2y + 7z = 17 \\ 4x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 4x - 3y + 7z = 2 \\ -3x + 5y + z = -1 \\ 10x - 13y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 7x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - 5z = -3 \\ x - 10y + 17z = 12 \end{cases}$$

Esercizio 5. Calcolare il determinante della matrice assegnata:

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1+t & -1+2t \\ 6+5t & 2-t \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} -1+t & 2 & -3 \\ 1+2t & 5 & -1 \\ -2 & 2-3t & 5 \end{pmatrix}$$