

Esercizi di Algebra Lineare (Petronio 12/13)

9 novembre 2012

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita. Provare che se $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq \dim_{\mathbb{R}}(W)$ allora esistono applicazioni lineari $f : V \rightarrow W$ surgettive. Provare inoltre che se $f : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare surgettiva allora esiste $g : W \rightarrow V$ lineare tale che $f \circ g = \text{id}_W$.

Esercizio 2. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita. Provare che se $\dim_{\mathbb{R}}(V) \leq \dim_{\mathbb{R}}(W)$ allora esistono applicazioni lineari $f : V \rightarrow W$ iniettive. Provare inoltre che se $f : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare iniettiva allora esiste $g : W \rightarrow V$ lineare tale che $g \circ f = \text{id}_V$.

Esercizio 3. Esibire basi di nucleo e immagine dell'applicazione lineare associata alla matrice A data:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Verificare che i sistemi di vettori $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dati costituiscono basi di dominio e codominio dell'applicazione lineare f assegnata, e determinare la matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e a $\mathcal{C}$ in arrivo.

$$(a) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$(b) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$(c) \quad f: \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(A) = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} - a_{22} \\ 5a_{11} - 3a_{21} + a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(d) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}_3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 2x_1 - x_2 \\ x_1 & 0 & x_1 - 3x_2 \\ x_2 - 2x_1 & 3x_2 - x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$(e) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + y_3 = 0\}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$$

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

Esercizio 5.

Esercizio 6.

Esercizio 7.

Esercizio 8.

Esercizio 9.

Esercizio 10.

Esercizio 11.

Esercizio 12.