

Esercizi di Algebra Lineare (Petronio 12/13)

6 novembre 2012

Esercizio 1 Posto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verificare la relazione $f_{(A \cdot B)}(x) = (f_A \circ f_B)(x)$.

Esercizio 2. Date $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{k \times h}(\mathbb{R})$ verificare che la formula $f(X) = A \cdot X \cdot B$ definisce un'applicazione $f : \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{m \times h}(\mathbb{R})$ lineare, e che $\text{Ker}(f) = \{X : X(\text{Im} B) \subset \text{Ker} A\}$.

Esercizio 3. Posto

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -7 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

provare che la formula $g(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione $g : X \rightarrow X$ lineare.

Esercizio 4. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ descrivere

$$\{B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \cdot B = B \cdot A\}.$$

Esercizio 5. Date matrici A e B dire quando ha senso porsi il problema di verificare l'uguaglianza $A \cdot B = B \cdot A$.

Esercizio 6. Data $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ provare che $\{B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \cdot B = B \cdot A\}$ è un sottospazio vettoriale e che ha sempre dimensione almeno 2; dire per quali A coincide con $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e provare che non può avere dimensione 3.

Esercizio 7. Per lo spazio vettoriale V dato e i sottospazi W e Z assegnati provare che si ha la decomposizione in somma diretta $V = W \oplus Z$ ed esibire le associate proiezioni p e q , provando che

$$p \circ p = p, \quad q \circ q = q, \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

$$(a) \quad V = \mathbb{R}^2, \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad Z = \text{Span} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad V = \mathbb{R}^2, \quad W = \text{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z : 5x_1 + 2x_2 = 0$$

$$(c) \quad V = \mathbb{R}^2, \quad W : 3x_1 + 7x_2 = 0, \quad Z : 2x_1 - 9x_2 = 0$$

$$(d) \quad V = \mathbb{R}^3, \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad Z = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad V = \mathbb{R}^3, \quad W : 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \quad Z = \text{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad V = \mathbb{R}^3, \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$Z : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(g) \quad V = \mathbb{R}^3, \quad W : 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \quad Z : \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(h) \quad V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \quad W = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$Z : 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0$$

$$(i) \quad V = \mathbb{R}_{\leq 3}[t], \quad W = \text{Span}(2 - t + t^3, 1 + t^2 - 4t^3),$$

$$Z : \begin{cases} p(1) + p'(-1) = 0 \\ p(2) - 2p''(1) = 0 \end{cases}$$