

Esercizi di Algebra Lineare (Petronio 12/13)

2 dicembre 2012

Esercizio 1. Usando il teorema degli orlati calcolare il rango della matrice assegnata:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Come può cambiare il rango di una matrice cambiandone un solo coefficiente? Fornire esempi di tutte le situazioni possibili.

Esercizio 3. Calcolare la dimensione del sottospazio affine E assegnato, trovandone una presentazione parametrica quando ne viene fornita una cartesiana, e viceversa.

$$(a) \ E \subset \mathbb{R}^3, \quad E : 4x - 5y + 6z = 8$$

$$(b) \ E \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - 2y + 5z = -1 \\ 7x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$(c) \ E \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} 5x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = -3 \\ x - 7y + 10z = 7 \end{cases}$$

$$(d) \ E \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

$$(e) \ E \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 3 + 2t - 5s \\ z = 4 - 2t + 3s \end{cases}$$

$$(f) \ E \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} x = -1 + t + s + 2u \\ y = 4 - 2t + 3s + u \\ z = 2 + 5t - 2s + 3u \end{cases}$$

$$(g) \ E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5w = 7 \\ 3x - 5y + 7z + 2w = -1 \end{cases}$$

$$(h) \ E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} 3x - 2y + 4z + w = -1 \\ 2x + 5y - 3z + 4w = 3 \\ 5x - 16y + 18z - 5w = -9 \end{cases}$$

$$(i) \ E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} 4x - y + 2z + w = 3 \\ 2x + 3y - 5z + 4w = 2 \\ 2x - 4y + 7z - 3w = 5 \end{cases}$$

$$(j) \ E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} 4x - y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + y + 3z - 6w = 3 \\ -x + 5y + 2z - 4w = 4 \end{cases}$$

$$(k) \ E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 + 4t \\ w = 3 - 7t \end{cases}$$

$$(1) \quad E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = -2 + t + 3s \\ y = 4 + 5t - 2s \\ z = -3 + 4t + 5s \\ w = 1 + 3t - s \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare la posizione reciproca dei sottospazi affini E ed F assegnati, calcolando le dimensioni di E , F , $E \cap F$ ed $E + F$.

$$(a) \quad E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

$$F : 3x - 5y + 2z = 7$$

$$(b) \quad E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

$$F : 7x - 5y - 2z = 11$$

$$(c) \quad E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E : 3x - 5y + 2z = -1$$

$$F : 4x + 2y - 7z = 8$$

$$(d) \quad E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E : 2x - 5y + 3z = 1$$

$$F : \begin{cases} x = -2 + t - s \\ y = 1 + t + 5s \\ z = 7 + t + 9s \end{cases}$$

$$(e) \quad E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} 3x - 2y + z = -1 \\ 4x - 3y + 5z = 12 \end{cases}$$

$$F : \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 2t \\ z = 7 - 3t \end{cases}$$

$$(f) \quad E, F \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 4 - 3t \\ w = -3 + t \end{cases}$$

$$F : \begin{cases} 2x + y - 4z + w = -12 \\ 3x + 2y - 6z + 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(g)} \quad E, F \subset \mathbb{R}^4, \quad E : & \begin{cases} x = 1 - t + s \\ y = 2 + 3t - s \\ z = 4 + 2t + s \\ w = -1 + 2t - s \end{cases} \\
 F : & \begin{cases} 3x + y + z - w = 1 \\ -x + 2y + 3z + w = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(h)} \quad E, F \subset \mathbb{R}^4, \quad E : & \begin{cases} x = 3 + 2t - s \\ y = -1 + 5t - 4s \\ z = 1 - 2t + 3s \\ w = 5 - 3t + 4s \end{cases} \\
 F : & \begin{cases} 3x - 2y + 4z - 5w = 1 \\ -x + 3y - 4z + 2w = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$