UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 18/2/13 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\}$ e $\mathcal{S} = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5,\ 3e_1 + 2e_2 - e_3 + 5e_4 + 3e_5)$ è possibile completare $\mathcal{S}$ a una base di X? Spiegare.

2. Dato $v_1 = e_1 + 7e_2$ trovare $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che se $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ allora $[7e_1 + e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3. Calcolare $\det \begin{pmatrix} t & -1 & 2 \\ 1-t & 3 & 1 \\ 1 & t & -4 \end{pmatrix}$.

4. Se $f : \{z \in \mathbb{C}^4 : \ 2iz_2 + z_3 - (1+i)z_4 = 0\} \to \mathbb{C}^8$ è lineare e iniettiva e $\mathbb{C}^8 = Z \oplus \mathrm{Im}(f)$, che dimensione ha Z?

5. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante sono le soluzioni di $\begin{cases} (t+1) \cdot x - 3t \cdot y = t \\ (t-4) \cdot x + (t+2) \cdot y = t - 1. \end{cases}$

6. Calcolare $10 \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 1-2i \\ 3-i & 2+i \end{pmatrix}^{-1}$.

7. Dati X, Y sottospazî di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$, e dette p e q le proiezioni associate a tale decomposizione, sapendo che $p(3e_1 + 2e_3) = e_1 + e_2 - e_3 + 2e_4$ calcolare $q(3e_1 + 2e_3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 18/2/13 — Esercizî

1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 0\}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & -8 \\ 6 & -9 & 4 & 27 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Dimostrare che $\det(M) \neq 0$.

(B) (2 punti) Dimostrare che la formula $f(x) = M \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(C) (2 punti) Supponendo noti (A) e (B), anche senza averli dimostrati, provare che f è invertibile.

(D) (2 punti) Esibire tutti i vettori di X aventi due sole coordinate non nulle, intere e prime tra loro, di cui positiva quella con indice maggiore.

(E) (2 punti) Disporre i vettori di (D) in modo che sia non decrescente la quarta coordinata, e, a parità di quarta coordinata, che sia decrescente la somma delle coordinate; quindi estrarre dal sistema di vettori ottenuto una base $\mathcal{B}$ di X.

(F) (2 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

2. In $\mathbb{C}^3$ considerare i sottospazî affini

$$E = \{z : \ 2iz_1 + 3z_2 - (1+i)z_3 = 1\}, \quad F = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (4 punti) Trovare equazioni parametriche di E.

(B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di F.

(C) (4 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane di $E \cap F$.

Risposte

5. ♢

1. No: il secondo vettore di $\mathcal{S}$ non sta in X

2. $v_2 = -e_1 + 5e_2$

3. $-3t^2 - 6t - 11$

4. 5

5. Infinite per $t = \frac{1}{4}$, nessuna per $t = 2$, una sola altrimenti

6. $\begin{pmatrix} 1-2i & 2+i \\ 1+3i & 1-i \end{pmatrix}$

7. $2e_1 - e_2 + 3e_3 - 2e_2$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\det(M) = -13$

(B) $(3, -6, 4, 15) \cdot M = 13 \cdot (3, -6, 4, 15)$

(C) Grazie ad (A) l'applicazione $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata a M è iniettiva; grazie a (B), la f è l'abbreviazione a X della restrizione di g a X, dunque è anch'essa iniettiva, e per la formula della dimensione è anche surgettiva

(D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}$

(E) L'ordine è il precedente; bisogna scegliere primo, secondo e quarto vettore

(F) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.

(A) $E = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

(B) $F = \{z : \ (1-2i)z_1 - 2z_2 + (6+i)z_3 = i\}$

(C) $E \cap F = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -16-i \\ 1+11i \\ 3-2i \end{pmatrix} = \left\{ z : \begin{array}{l} (1+11i)z_1 + (16+i)z_2 = 5+2i \\ (3-2i)z_1 + (16+i)z_3 = 2+3i \end{array} \right\}$