



Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Dati 13 generatori di  $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leq 8}[z] : p''(3i) = 0\}$ , quanti bisogna scartarne per avere una base?

2. Determinare  $[11e_1 + 6e_2]_{\mathcal{B}}$  dove  $\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2, 3e_1 + e_2)$ .

3. Se  $f : \{x \in \mathbb{R}^4 : 7x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^7$  non è iniettiva, che dimensione può avere  $\text{Im}(f)$ ?

4. Calcolare  $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

5. Stabilire quante sono al variare di  $t \in \mathbb{R}$  le soluzioni del sistema  $\begin{cases} (1+t)x - 3ty = 1 - 2t \\ (t-4)x + (t+2)y = t \end{cases}$ .

6. Calcolare  $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ .

7. Dati  $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0\}$  e  $Y = \text{Span}(3e_1 + 2e_2 + e_3)$  calcolare la proiezione su  $X$  di  $2e_1 - 3e_2 + e_3$  rispetto alla decomposizione  $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ .

---

### Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇

---



1. Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  considerare tutte le applicazioni lineari  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tali che

$$f \begin{pmatrix} -k \\ 2+3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1+2k \\ 4-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k-2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (A) (4 punti) Stabilire per ogni  $k$  quante tali  $f$  esistono.
- (B) (2 punti) Trovare per quali  $k \in \mathbb{R}$  la  $f$  esiste unica ma non è iniettiva.
- (C) (2 punti) Per  $k = 0$  trovare  $f^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
- (D) (4 punti) Per  $k = 1$  trovare  $[f]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}$ .

2. In  $\mathbb{R}^3$  considerare

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right), \quad \ell : \begin{cases} 5x - 3y - 2z = 7 \\ 4x - 2y + 3z = 13. \end{cases}$$

- (A) (1 punto) Trovare equazioni parametriche del piano parallelo a  $P$  e passante per  $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \pi \\ -e \end{pmatrix}$ .
- (B) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane della retta parallela a  $\ell$  e passante per  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ .
- (C) (3 punti) Trovare un'equazione cartesiana di  $P$ .
- (D) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di  $\ell$ .
- (E) (3 punti) Determinare la posizione reciproca di  $P$  ed  $\ell$ .



## Risposte

5. ♥

1. 5

2.  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Tra 0 e 2

4. 5

5. Infinite per  $t = 2$ , nessuna per  $t = \frac{1}{4}$ , una altrimenti

6.  $\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

7.  $8e_1 + e_2 + 3e_3$ 

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇

---



## Soluzioni

1.

(A) Infinite per  $k = -2$ , nessuna per  $k = -\frac{1}{5}$ , una sola altrimenti(B)  $k = 3$ (C)  $\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ (D)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 

2.

(A)  $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \pi \\ -e \end{pmatrix} + \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ (B)  $\begin{cases} 5x - 3y - 2z = -1 \\ 4x - 2y + 3z = 31 \end{cases}$ (C)  $-17x + 13y + 16z = 5$ (D)  $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \\ -2 \end{pmatrix}$ (E) Incidenti nel punto  $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$