



1. Se v_1, \dots, v_n sono generatori di $\{x \in \mathbb{R}^8 : x_2 - 5x_4 + 2x_7 = 0\}$, quanto può valere n ?
2. Se $f : \mathbb{C}^8 \rightarrow \mathbb{C}^4$ è lineare e non surgettiva, e $\mathbb{C}^8 = W \oplus \text{Ker}(f)$, che dimensione può avere W ?
3. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
4. Determinare $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.
5. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcolare i determinanti delle orlate di M in A .
6. Se due numeri complessi hanno argomenti rispettivamente $\frac{4}{3}\pi$ e $-\frac{5}{6}\pi$, che argomento ha il loro prodotto?
7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(3e_1 + 4e_2 - e_3)$, calcolare la proiezione su X del vettore $3e_1 + 2e_2 - e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.



1. Al variare di t in \mathbb{R} considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & t-1 & 3 \\ t & 4 & t-3 \end{pmatrix}$, il vettore $b_t = \begin{pmatrix} t+3 \\ t-7 \\ 14 \end{pmatrix}$ e il sistema lineare $A_t \cdot x = b_t$.

- (A) (3 punti) Provare che per $t = -1$ il sistema ha soluzione unica, ed esibire tale soluzione.
- (B) (3 punti) Trovare il valore t_1 per cui il sistema ha infinite soluzioni, e il valore t_2 per cui non ha alcuna soluzione.
- (C) (3 punti) Esibire tutte le soluzioni del sistema per $t = t_1$
- (D) (3 punti) Esibire $\text{Ker}(A_{t_2})$ e provare che $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A_{t_2}) \oplus \text{Im}(A_{t_2})$.

2. In \mathbb{R}^4 considerare i sottospazi $X = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ e $Y = \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

- (A) (3 punti) Provare che i vettori assegnati come generatori di X ne costituiscono una base \mathcal{B} ed esibire il vettore v di X tale che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- (B) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di X .
- (C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di Y .
- (D) (3 punti) Esibire $X \cap Y$ e calcolare la dimensione di $X + Y$.



Risposte

5. ♥

1. Almeno 7
2. Tra 0 e 3
3. $\begin{pmatrix} 22 & 13 \\ -31 & -18 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$
5. 19 e -59
6. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
7. $9e_1 + 10e_2 - 3e_3$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



Soluzioni

1.

$$(A) \det(A_{-1}) = -3; x = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(B) t_1 = -2, t_2 = 2$$

$$(C) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ con } s \in \mathbb{R}$$

$$(D) \text{Span} \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}; \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & -13 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -44$$

2.

$$(A) \text{ Sono linearmente indipendenti; } v = \begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ -16 \\ -27 \end{pmatrix}$$

$$(B) X = \text{Ker} \begin{pmatrix} 10 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(C) Y = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \right)$$

$$(D) X \cap Y = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}; \text{dimensione } 3$$