UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 23/7/12 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

Immatricolazione: 2011/12 ☐ Precedente ☐ CdL: Ing. Civ. ☐ Altro ☐

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1+i & i \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitarî, con somma delle componenti nulla e ortogonali a $4e_1 - 5e_2 + 3e_3$.

3. Determinare in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'intersezione dei luoghi
$\{[1-t : 3t : 7-t] : \ t \in \mathbb{R}\}$ e $\{1-t : 1+t : -2t] : \ t \in \mathbb{R}\}$.

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica $x^2 + 4kxy + ky^2 + 2x + y + 3 = 0$ è una parabola.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $x^2 - 4z^2 + 2xy - 4yz + 3x + 5y + 8z = 0$.

6. Determinare la matrice hessiana in $(0,0)$ di $f(x,y) = \sin(xy) - 2e^{x^2+3y^2}$ e i segni dei suoi autovalori.

7. Calcolare $\int_\alpha (3xy^2\,\mathrm{d}x + 2x^2y\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (2t^2, t^3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 23/7/12 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} k^2 & 3-k & 0 \\ k^2-3 & 0 & k^2+1 \\ 0 & 3k-1 & -2k^2 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Stabilire per quale k la A risulta antisimmetrica.

(B) (3 punti) Per il valore di k del punto precedente trovare la forma canonica di A su $\mathbb{R}$.

(C) (2 punti) Stabilire per quale k la A risulta simmetrica.

(D) (4 punti) Per il valore di k del punto precedente trovare gli autovalori di A e una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

(E) (2 punti) Per i valori di k del punto (B) trovare la matrice unitaria M che coniuga A alla sua forma canonica.

2. Considerare la curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \cos(\pi s) \\ \log(1+s) \\ 2s^2+s^3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare il dominio D di α e provare che su D la α è semplice e regolare.

(B) (3 punti) Calcolare $\int_\beta z\,\mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

(C) (3 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α in $s=0$.

(D) (4 punti) Trovare curvatura e torsione di α in $s=0$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♢

1. $\lambda_1 = -1,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 2+i,\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{146}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$

3. Il punto $[1 : -2 : 3]$

4. $k = 0$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}$; entrambi negativi

7. $\frac{24}{5}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $k = 0$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $k = 2$

(D) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = -3 \pm \sqrt{55};\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{110 \pm 14\sqrt{55}}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} \pm 2\sqrt{11} \\ \sqrt{5} \pm \sqrt{11} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.

(A) $D = (-1, +\infty)$; la seconda componente ha derivata positiva

(B) $\log 2 - \frac{1}{6}$

(C) $t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{16+\pi^4}} \begin{pmatrix} -\pi^2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{16+\pi^4}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \pi^2 \end{pmatrix}$

(D) $\kappa = \sqrt{16 + \pi^4},\ \tau = \frac{6\pi^2}{16+\pi^4}$