UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/9/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

Immatricolazione: 2011/12 □ Precedente □ CdL: Ing. Civ. □ Altro □

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 2k^2 & k-1 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $\mathrm{Span}(e_1 - 2e_2 + e_3,\ 5e_1 + e_2 - 4e_3)$ e aventi somma delle componenti uguale a 1.

3. Determinare i punti di intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ del luogo $\{[t+2 : t^2+3 : t+6] :\ t \in \mathbb{R}\}$ con la retta passante per i punti $[1:2:3]$ e $[3:-1:5]$.

4. Stabilire per quali $h \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 + 4xy + (1+h)y^2 + 4x + 2hy + 4 = 0$ è un'ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 6yz + 2y = 0$.

6. Determinare i segni degli autovalori della matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = 5y^2 + e^{2x-y} \cdot \cos(x+2y)$.

7. Calcolare $\int_\alpha (2xy^3\,\mathrm{d}x + 3x^2y^2\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)\right)$ con $t \in [0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/9/12 — Esercizî

1. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2+3i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di A.

(B) (4 punti) Trovare gli autovalori di $B = A + A^*$ e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di B.

(C) (4 punti) Trovare gli autovalori di $C = A - A^*$ e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di C.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (1 - t^4, \sin(\pi \cdot t))$.

(A) (2 punti) Provare che α è regolare.

(B) (2 punti) Trovare il più grande intervallo $I_\pm$ contenente il punto $\pm\frac{3}{2}$ tale che la restrizione di α a $I_\pm$ sia semplice.

(C) (2 punti) Determinare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ vicino ai quali l'immagine di α non è una curva.

(D) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = \frac{1}{2}$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int\limits_\beta \frac{(x+10)\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x+10)^2 + y^2}$ dove β è la restrizione di α a $[-2, 2]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. $k \neq -\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

3. $[0 : 7 : 4]$ e $[10 : 13 : 26]$

4. $3 < h < 4$ o $h > 4$

5. Paraboloide ellittico

6. Entrambi positivi

7. $\frac{3}{16}\sqrt{3} - 1$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) No: $AA^* = \begin{pmatrix} 18 & 10+18i \\ 10-18i & 30 \end{pmatrix} \neq A^*A = \begin{pmatrix} 18 & 18+10i \\ 18-10i & 30 \end{pmatrix}$

(B) $\lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{59}$, $v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{118 \pm 6\sqrt{59}}} \begin{pmatrix} 5(1+i) \\ 3 \pm \sqrt{59} \end{pmatrix}$

(C) $\lambda_{1,2} = \left(3 \pm \sqrt{3}\right) i$, $v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \pm \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2.

(A) $\alpha'(t)$ ha prima componente nulla solo in $t=0$, dove ha seconda componente π

(B) $I_- = (-\infty, +1)$, $I_+ = (-1, +\infty)$

(C) $(1-n^4, 0)$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

(D) $4\pi^2$

(E) -2π