UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS • 1343 •

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/9/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

Immatricolazione: 2011/12 □ Precedente □ CdL: Ing. Civ. □ Altro □

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^2 & k+1 \\ 0 & k+2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $\mathrm{Span}(e_1 + 2e_2 - e_3,\ 4e_1 + e_2 - 5e_3)$ e aventi somma delle componenti uguale a 1.

3. Determinare i punti di intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ del luogo $\{[t+3 : t^2-2 : t+4] :\ t \in \mathbb{R}\}$ con la retta passante per i punti $[2:3:-1]$ e $[-4:1:3]$.

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 + 4xy + (k-1)y^2 + 4x + 2ky + 8 = 0$ è un'ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $z^2 - 8xy + 2xz - 4yz + 3x + 4z + 1 = 0$.

6. Determinare i segni degli autovalori della matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + e^{x-y} \cdot \cos(x+y)$.

7. Calcolare $\int_\alpha (3x^2y^2\,\mathrm{d}x + 2x^3y\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)\right)$ con $t \in [0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/9/12 — Esercizî

1. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2+3i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di A.

(B) (4 punti) Trovare gli autovalori di $B = A + A^*$ e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di B.

(C) (4 punti) Trovare gli autovalori di $C = A - A^*$ e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di C.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (1 - t^4, \sin(\pi \cdot t))$.

(A) (2 punti) Provare che α è regolare.

(B) (2 punti) Trovare il più grande intervallo $I_\pm$ contenente il punto $\pm\frac{3}{2}$ tale che la restrizione di α a $I_\pm$ sia semplice.

(C) (2 punti) Determinare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ vicino ai quali l'immagine di α non è una curva.

(D) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = \frac{1}{2}$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\beta \frac{(x+10)\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x+10)^2+y^2}$ dove β è la restrizione di α a $[-2, 2]$.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $k \neq 2$

2. $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. $[0 : 7 : 1]$ e $[18 : 223 : 19]$

4. $5 < k < 6$ o $k > 6$

5. Paraboloide iperbolico

6. Uno positivo e uno negativo

7. $\frac{3}{16}\sqrt{2} - 1$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) No: $AA^* = \begin{pmatrix} 18 & 10+18i \\ 10-18i & 30 \end{pmatrix} \neq A^*A = \begin{pmatrix} 18 & 18+10i \\ 18-10i & 30 \end{pmatrix}$

(B) $\lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{59}$, $v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{118 \pm 6\sqrt{59}}} \begin{pmatrix} 5(1+i) \\ 3 \pm \sqrt{59} \end{pmatrix}$

(C) $\lambda_{1,2} = \left(3 \pm \sqrt{3}\right) i$, $v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \pm \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2.

(A) $\alpha'(t)$ ha prima componente nulla solo in $t=0$, dove ha seconda componente π

(B) $I_- = (-\infty, +1)$, $I_+ = (-1, +\infty)$

(C) $(1-n^4, 0)$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

(D) $4\pi^2$

(E) -2π