Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 12/6/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

Immatricolazione: 2011/12 ☐ Precedente ☐ CdL: Ing. Civ. ☐ Altro ☐

1. Determinare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

2. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ determinare il suo polinomio caratteristico $p_A(t)$ sapendo che $\operatorname{tr}(A) = 3$, $\det(A) = -4$ e $p_A(1) = -4$.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, ortogonali a $ie_1 + (1-i)e_2$ e aventi prima componente immaginaria pura.

4. Per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 2(1+i) & z \\ 2i & 1+i \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della quadrica di equazione
$(k+2)x^2 + 2ky^2 + z^2 + 2(k-2)xy + 4xz + 2(k+1)x + 2(2k+1)y + 2z + 2k + 3 = 0.$

6. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ trovare l'intersezione dei luoghi $\{[-6 : 2t : 3t-4] :\ t \in \mathbb{R}\}$ e $\{[t^2+2 : -2 : t] :\ t \in \mathbb{R}\}$.

7. Stabilire se sull'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \max\{|x|,|y|\} \leqslant 3,\ |x|+|y| \geqslant 2\}$ siano definite forme chiuse non esatte.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 12/6/12 — Esercizî

1. Considerare la matrice $B = \begin{pmatrix} 31 & 33 & -41 \\ -33 & -35 & 45 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ e in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$X = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -23 \end{pmatrix}\right).$$

(A) (4 punti) Determinare la matrice A della proiezione ortogonale su X.

(B) (4 punti) Stabilire se B è diagonalizzabile esibendo in ogni caso gli autovalori con le loro molteplicità e basi dei relativi autospazî.

(C) (4 punti) Stabilire se $A + B$ è diagonalizzabile esibendo in ogni caso gli autovalori con le loro molteplicità e basi dei relativi autospazî.

2. Considerare la curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s \cdot e^s \\ \ln(1+s) \\ s^3 - s^2 - 2s \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (2 punti) Calcolare $\int_\beta z\,\mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

(C) (3 punti) Calcolare $\int_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ dove γ è la proiezione sul piano Oxy della restrizione di α a $[1, 3]$.

(D) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(E) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

Risposte

5. ♡

1. $\lambda_1 = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 1 - i,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $p_A(t) = t^3 - 3t^2 - 6t + 4$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2i \\ i-1 \end{pmatrix}$

4. $z = 2$

5. Iperboloide a una falda per $k < -2$, degenere per $k = -2$, iperboloide a due falde per $-2 < k < 2$, paraboloide ellittico per $k = 2$, ellissoide per $k > 2$

6. $\{[-3 : 2 : 1],\ [33 : -8 : 10]\}$

7. Sì

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 13 \end{pmatrix}$

(B) Sì; autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ tutti con molteplicità algebrica e geometrica 1 e autospazî relativi generati da $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) Sì; autovalori $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica e geometrica 2 e autospazio relativo generato da $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica e geometrica 1 e autospazio relativo generato da $\begin{pmatrix} -52 \\ 57 \\ 5 \end{pmatrix}$

2.

(A) La seconda componente ha derivata strettamente positiva

(B) $-\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{2} \ln \frac{9e^6 + \ln^2 4}{e^2 + \ln^2 2}$

(D) $t(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $n(0) = \frac{1}{\sqrt{174}}\begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b(0) = -\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(E) $\kappa(0) = \sqrt{\frac{29}{216}}$, $\tau(0) = -\frac{34}{29}$