UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 2/7/12 — Quesiti

**Nome** ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

Immatricolazione: 2011/12 ☐ Precedente ☐ CdL: Ing. Civ. ☐ Altro ☐

**1.** Calcolare $\int_\alpha y\cos(xy^2)\,(y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \left(\frac{t}{2}, \cos t\right)$.

**2.** Calcolare $\int_\alpha y$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t^2, 3t)$.

**3.** Calcolare curvatura e torsione di $\alpha(t) = (t^2, 3t^3, 2\sin t)$ in $t = 0$.

**4.** Determinare i punti di intersezione dell'insieme $\{[2t-1 : t-1 : t+1] :\ t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $3y^2 - z^2 + 2xz + 9y + 3z = 2$.

**5.** Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la quadrica di equazione $x^2 + (a+1)y^2 + az^2 + a = 2$ è un iperboloide a due falde.

**6.** Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

**7.** Trovare $a > 0$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{6} \\ 1 & 0 & -3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 0 \end{pmatrix}$ sia coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

**1.** Dato $w = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ considerare le matrici

$$M = \begin{pmatrix} iw & 0 & 0 \\ 5\sqrt{3}i & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 5\sqrt{6}i & 0 & w \end{pmatrix}, \qquad X = M + M^*, \qquad Y = M - M^*.$$

(A) (2 punti) Esplicitare $X$ e $Y$ rispetto a $\alpha$ e $\beta$.

(B) (4 punti) Stabilire per quali $\alpha$ e $\beta$ la $X$ risulta definita positiva.

(C) (4 punti) Per $w = 1 - \frac{3}{2}i$ determinare gli autovalori di $X$ e una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ che la diagonalizza.

(D) (2 punti) Per $w = 0$ trovare gli autovalori di $Y$ e un autovettore relativo all'autovalore reale.

**2.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k^2 + k - 22 & -3k^2 - 2k + 57 & -k^2 - k + 12 \\ -8 & k^2 + 20 & 4 \\ 2k^2 + 2k + 4 & -6k^2 - 4k - 6 & -k^2 - 2k \end{pmatrix}.$$

(A) (5 punti) Sapendo che $A$ ha sempre l'autovalore $k^2$, trovare gli altri due autovalori.

(B) (2 punti) Stabilire per quali $k$ la $A$ ha 3 autovalori distinti.

(C) (5 punti) Stabilire per quali $k$ la $A$ non ha 3 autovalori distinti ma risulta diagonalizzabile.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

# Risposte

## 5. ♡

**1.** 1

**2.** $\frac{1}{4}\left(13^{3/2}-27\right)$

**3.** $\kappa(0)=\frac{1}{2},\ \tau(0)=\frac{9}{2}$

**4.** $\{[1:1:-1],\ [1:0:2]\}$

**5.** $a<-1$

**6.** $\lambda_1=5,\ v_1=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\ \lambda_2=-2,\ v_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

**7.** $a=4$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Soluzioni

**1.**

(A) $X = \begin{pmatrix} -2\beta & -5\sqrt{3}i & -5\sqrt{6}i \\ 5\sqrt{3}i & 1 & \sqrt{2} \\ 5\sqrt{6}i & \sqrt{2} & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2i\alpha & 5\sqrt{3}i & 5\sqrt{6}i \\ 5\sqrt{3}i & 0 & \sqrt{2} \\ 5\sqrt{6}i & -\sqrt{2} & 2i\beta \end{pmatrix}$

(B) $\alpha > 1$ e $\beta < -\frac{75}{2}$

(C) $\lambda_1 = -12,\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 18,\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \lambda_3 = 0,\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) $\lambda_1 = 0,\ v_1 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ -5\sqrt{6} \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{227}i$

**2.**

(A) $2 - k$ e $k^2 - 4$

(B) $k$ diverso da $-3,\ -2,\ 1,\ 2$

(C) $k = -3$