UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 2/7/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

Immatricolazione: 2011/12 □ Precedente □ CdL: Ing. Civ. □ Altro □

1. Calcolare $\int_\alpha y \sin(xy^2)\,(y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \left(t, \sin\frac{t}{2}\right)$.

2. Calcolare $\int_\alpha x$ con $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t, 2t^2)$.

3. Calcolare curvatura e torsione di $\alpha(t) = (2t^2, t^3, \sin t)$ in $t = 0$.

4. Determinare i punti di intersezione dell'insieme $\{[2t-1 : t+1 : t-1] : \ t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $2xy - y^2 + 3z^2 - 7x + 2z = 3$.

5. Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la quadrica di equazione $x^2 + (a-1)y^2 + (a+2)z^2 + a = 0$ è un iperboloide a una falda.

6. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

7. Trovare $a > 0$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sia coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$ considerare le matrici

$$A = \begin{pmatrix} iz & 0 & 0 \\ 5\sqrt{3}i & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 5\sqrt{6}i & 0 & z \end{pmatrix}, \qquad B = A + A^*, \qquad C = A - A^*.$$

(A) (2 punti) Esplicitare B e C rispetto a x e y.

(B) (4 punti) Stabilire per quali x e y la B risulta definita positiva.

(C) (4 punti) Per $z = 1 - \frac{3}{2}i$ determinare gli autovalori di B e una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ che la diagonalizza.

(D) (2 punti) Per $z = 0$ trovare gli autovalori di C e un autovettore relativo all'autovalore reale.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k^2 - k - 19 & -3k^2 + 4k + 44 & -k^2 + k + 10 \\ -8 & k^2 + 19 & 4 \\ 2k^2 - 2k + 12 & -6k^2 + 8k - 32 & -k^2 + 2k - 5 \end{pmatrix}.$$

(A) (5 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $k^2 - 5$, trovare gli altri due autovalori.

(B) (2 punti) Stabilire per quali k la A ha 3 autovalori distinti.

(C) (5 punti) Stabilire per quali k la A non ha 3 autovalori distinti ma risulta diagonalizzabile.

Risposte

5. ♢

1. 2

2. $\frac{1}{48}\left(17^{3/2}-1\right)$

3. $\kappa(0)=4,\ \tau(0)=\frac{3}{2}$

4. $\{[1:-1:1],\ [1:2:0]\}$

5. $-2<a<0$

6. $\lambda_1=4,\ v_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \lambda_2=-3,\ v_2=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

7. $a=3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $B = \begin{pmatrix} -2y & -5\sqrt{3}i & -5\sqrt{6}i \\ 5\sqrt{3}i & 1 & \sqrt{2} \\ 5\sqrt{6}i & \sqrt{2} & 2x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2ix & 5\sqrt{3}i & 5\sqrt{6}i \\ 5\sqrt{3}i & 0 & \sqrt{2} \\ 5\sqrt{6}i & -\sqrt{2} & 2iy \end{pmatrix}$

(B) $x > 1$ e $y < -\frac{75}{2}$

(C) $\lambda_1 = -12,\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 18,\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \lambda_3 = 0,\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) $\lambda_1 = 0,\ v_1 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ -5\sqrt{6} \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{227}i$

2.

(A) $k+1$ e k^2-1

(B) k diverso da $-1,\ -2,\ 2,\ 3$

(C) $k = \pm 2$