UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 25/6/12 — Quesiti

Nome ______ **Cognome** ______ **Matricola** ______

Immatricolazione: 2011/12 ☐ Precedente ☐ CdL: Ing. Civ. ☐ Altro ☐

1. Dati 11 generatori di $\{x \in \mathbb{R}^6 :\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = x_2 + x_3 + x_5 = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$, quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

2. Data la base $\mathcal{B} = (4 - 3t, 3 + 5t)$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 1}[\mathbb{R}]$, trovare $[-5 + 11t]_{\mathcal{B}}$.

3. Data $f : \mathbb{C}^8 \to \{z \in \mathbb{C}^3 :\ (1 - i)z_1 + 2iz_2 - 3z_3 = 0\}$ lineare surgettiva e $W \subset \mathbb{C}^8$ tale che $W \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, che dimensione può avere W?

4. Se $A = (v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ha determinante 3 e $B = (v_2 - 2v_3,\ 2v_1 + 5v_3,\ v_1 - v_2 + 2v_3)$, quanto vale il determinante di B?

5. Risolvere $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -3 \\ -4x + 5y + 2z = -1 \\ 10x - 9y + 6z = -5. \end{cases}$

6. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 2 \\ -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{32}$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(7e_1 + 2e_2 - 3e_3)$ calcolare la proiezione di $2e_1 + e_2 - 5e_3$ su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 25/6/12 — Eserciziî

1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(B) (3 punti) Esibire tutti gli elementi di X con due componenti nulle e le altre due intere coprime, con la prima delle due positiva; disporre tali vettori in ordine crescente di somma delle coordinate ed estrarne una base $\mathcal{C}$ di X.

(C) (2 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to X$.

(D) (3 punti) Esibire $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

(E) (2 punti) Esibire $f^{-1}(2e_1 + 8e_2 + e_3)$.

2. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ k-4 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ k+5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$F_h : \begin{cases} x + (h+3)y + (h+1)z = 1 \\ 3hx + 12y + 2(5-2h)z = h+2. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare n_0, n_1, k_0 tali che $\dim(E_k) = n_0$ per $k = k_0$ e $\dim(E_k) = n_1$ per $k \neq k_0$

(B) (3 punti) Trovare m_0, m_1, h_0 tali che $\dim(F_h) = m_0$ per $h = h_0$ e $\dim(F_h) = m_1$ per $h \neq h_0$

(C) (2 punti) Esibire equazioni cartesiane di E_k per $k = 2$ e per $k = k_0$.

(D) (2 punti) Esibire equazioni parametriche di F_h per $h = 3$ e per $h = h_0$.

(E) (2 punti) Al variare di k discutere la posizione di E_k rispetto a $F_{(-2)}$.

Risposte

5. ♡

1. 7

2. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Tra 0 e 2

4. 15

5. $x = 1 - 24t,\ y = 1 - 22t,\ z = 7t - 1$

6. $-\frac{1}{9}$

7. $\frac{1}{2}(11e_1 + 4e_2 - 13e_3)$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Come matrice ha determinante 5

(B) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathcal{C}$ consiste dei primi tre

(C) Le colonne di A appartengono a X

(D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & 8 \\ 27 & 11 & 15 \end{pmatrix}$

(E) $e_1 + e_2 + e_3$

2.

(A) $n_0 = 1,\ n_1 = 2,\ k_0 = -1.$

(B) $m_0 = 2,\ m_1 = 1,\ h_0 = 1.$

(C) $E_2 :\ 5x - 2y + 2z = 6;\ E_{(-1)} : \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - z = 7 \end{cases}$

(D) $F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 30 \\ -19 \\ 21 \end{pmatrix},\ F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

(E) Piano incidente a retta per $k \neq -1$ e $k \neq -\frac{29}{3}$; rette sghembe per $k = -1$; piano parallelo a retta per $k = -\frac{29}{3}$