UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 16/7/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

Immatricolazione: 2011/12 ☐ Precedente ☐ CdL: Ing. Civ. ☐ Altro ☐

1. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare, $f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, quanto vale $f^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$?

2. Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[e_1 - 4e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $[3e_1 + 11e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Data $A = (v_1,\ v_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A) = \frac{1}{7}(3-2i)$, calcolare $\det(B)$ dove $B = ((1-i)v_1 + (2+i)v_2,\ (2-3i)v_1 + (2+5i)v_2)$.

4. Se $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ è lineare, $f(3e_1 - 5e_2) = f(4e_3 + 7e_4)$ e $W \subset \mathbb{R}^7$ è tale che $W \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^7$, che dimensione può avere W?

5. Risolvere $\begin{cases} 4x - 3y + 5z = -4 \\ 5x + 2y - z = 11 \\ 3x + 5y - 7z = 22. \end{cases}$

6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Posto $V = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}\,(2e_1 + 3e_2 - e_3)$ calcolare la proiezione su V di $3e_1 + 6e_2 - e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazî V e W aventi le equazioni seguenti:

$$V: \ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \qquad W: \ -4x_1 + 12x_2 - x_3 + 11x_4 = 0;$$

prendere inoltre la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Estrarre da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ una base $\mathcal{B}$ di V.

(B) (3 punti) Completare $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ a una base $\mathcal{C}$ di W aggiungendo un vettore con due sole componenti non nulle, intere positive, prime fra loro, e aventi la minore somma possibile.

(C) (3 punti) Provare che l'espressione $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f: V \to W$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_h = \begin{pmatrix} 2-h \\ 1 \\ h \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} h+6 \\ 2h \\ 6-h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2h+4 \\ 1-h \\ 2h \end{pmatrix} \right),$$

$$F_k: \begin{cases} kx + (k-1)y + (3-k)z = 1 + 4k \\ (2+k)x + (1-k)y + 4kz = 2 - k. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare m_0, m_1, h_0 tali che $\dim(E_h) = m_0$ per $h = h_0$ e $\dim(E_h) = m_1$ per $h \neq h_0$.

(B) (3 punti) Trovare n_0, n_1, k_0 tali che $\dim(F_k) = n_0$ per $k = k_0$ e $\dim(F_k) = n_1$ per $k \neq k_0$.

(C) (3 punti) Esibire equazioni cartesiane di E_h per $h = -1$ e per $h = h_0$.

(D) (3 punti) Esibire equazioni parametriche di F_k per $k = 2$ e per $k = k_0$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

3. $2 + 3i$

4. Tra 4 e 7

5. $x = 2,\ y = -1,\ z = -3$

6. 28 e -51

7. $-7e_1 - 9e_2 + 4e_3$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) Scartare secondo e quarto vettore

(B) Aggiungere $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) $(-4, 12, -1, 11) \cdot A = (-2, 1, 3, 2)$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.

(A) $m_0 = 1,\ m_1 = 2,\ h_0 = -3.$

(B) $n_0 = 2,\ m_1 = 1,\ k_0 = -1.$

(C) $-5x + 12y + 7z = -10;\qquad \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3y + 2z = -3 \end{cases}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right);\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$