



 Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 5/6/12 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

 Immatricolazione: 2011/12 ☐ Precedente ☐ CdL: Ing. Civ. ☐ Altro ☐

1. Dati 13 generatori di $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leq 6}[z] : p''(2-i) = 0\}$, quanti bisogna scartarne per avere una base?

2. Trovare il vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che se $\mathcal{B} = (e_1 - 3e_2, v)$ allora $[e_1 - e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Se $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^5$ è lineare, $2e_1 - 5e_4 \notin \text{Im}(f)$, X è un sottospazio di $\mathbb{R}^8$ e $\dim_{\mathbb{R}}(X \cap \text{Ker}(f)) = 1$, che dimensione può avere X ?

4. Risolvere $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 3 \\ -3x + 4y + 2z = 7 \\ x + 6y + 14z = 27. \end{cases}$

5. Risolvere $\det \begin{pmatrix} 1 & x & -3 \\ 1+x & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 4$.

6. Se una matrice 5×5 ha rango 4 e una sua sottomatrice 3×3 ha determinante non nullo, è possibile che quest'ultima abbia una sola orlata con determinante non nullo? Spiegare.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(e_1 - 2e_2 + e_3)$ determinare la matrice della proiezione su X rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi affini

$$E_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \\ -1 \\ 2k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

$$F_k : \begin{cases} (2k-1)x_1 + x_2 + x_3 + kx_4 = 2k+7 \\ 2x_1 + (2k+1)x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -k. \end{cases}$$

- (A) (1 punto) Trovare la dimensione di E_k al variare di k .
- (B) (1 punto) Trovare la dimensione di F_k al variare di k .
- (C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_k per $k=2$.
- (D) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_k per $k=-2$.
- (E) (4 punti) Discutere la posizione reciproca di E_k ed F_k al variare di k .

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

- (A) (2 punti) Provare che $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi di X .
- (B) (2 punti) Calcolare A^{-1} .
- (C) (4 punti) Detta $f : X \rightarrow X$ l'applicazione lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = A$, stabilire che relazioni intercorrono tra le matrici

$$B = [f]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}, \quad C = [f^{-1}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}, \quad D = [f^{-1}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}, \quad M = [\text{id}_X]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

(senza determinare esplicitamente tali matrici).

- (D) (4 punti) Determinare esplicitamente le matrici M e B .



Risposte

5. ♥

1. 7

2. $e_1 - 2e_2$

3. Tra 1 e 5

4. $x = 3 - 2z$, $y = 4 - 2z$ 5. $x = -2$, $x = 11$ 6. Sì, basta definire la 5×5 orlando I_4 con una riga e una colonna nulle7. $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 17 & 7 & -3 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



Soluzioni

1.

(A) Sempre 2

(B) Sempre 2

$$(C) \begin{cases} 3x_1 - 13x_2 - 4x_3 = -27 \\ 22x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 57 \end{cases}$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

(E) Disgiunti per $k = 1$, altrimenti si intersecano in un punto

2.

(A) $\mathcal{B}_j$ contiene $3 = \dim(X)$ vettori linearmente indipendenti di X

$$(B) A^{-1} = \begin{pmatrix} -30 & -2 & 11 \\ -19 & -1 & 7 \\ 14 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(C) B = MAM^{-1}, C = B^{-1}, D = A^{-1}$$

$$(D) M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -8 & -1 & 7 \\ -11 & -7 & 18 \end{pmatrix}$$