Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 5/6/12 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

Immatricolazione: 2011/12 ☐ Precedente ☐ CdL: Ing. Civ. ☐ Altro ☐

1. Dati 12 generatori di $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leqslant 7}[z] : \ p''(1+i) = 0\}$, quanti bisogna scartarne per avere una base?

2. Trovare il vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che se $\mathcal{B} = (3e_1 - e_2, v)$ allora $[e_1 + e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Se $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ è lineare, $3e_2 - 2e_3 \notin \mathrm{Im}(f)$, X è un sottospazio di $\mathbb{R}^7$ e $\dim_{\mathbb{R}}(X \cap \mathrm{Ker}(f)) = 1$, che dimensione può avere X?

4. Risolvere $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 4y - 2z = 0 \\ -5x + 6y + 14z = 2. \end{cases}$

5. Risolvere $\det \begin{pmatrix} 1 & x & -2 \\ 1-x & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$

6. Se una matrice 4×4 ha rango 3 e una sua sottomatrice 2×2 ha determinante non nullo, è possibile che quest'ultima abbia una sola orlata con determinante non nullo? Spiegare.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 - 2e_2 + e_3)$ determinare la matrice della proiezione su X rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 5/6/12 — Esercizî

1. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ i sottospazî affini

$$E_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \\ -1 \\ 2k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

$$F_k : \begin{cases} (2k-1)x_1 + x_2 + x_3 + kx_4 = 2k+7 \\ 2x_1 + (2k+1)x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -k. \end{cases}$$

(A) (1 punto) Trovare la dimensione di E_k al variare di k.

(B) (1 punto) Trovare la dimensione di F_k al variare di k.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_k per $k = 2$.

(D) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_k per $k = -2$.

(E) (4 punti) Discutere la posizione reciproca di E_k ed F_k al variare di k.

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Provare che $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi di X.

(B) (2 punti) Calcolare A^{-1}.

(C) (4 punti) Detta $f : X \to X$ l'applicazione lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = A$, stabilire che relazioni intercorrono tra le matrici

$$B = [f]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}, \quad C = \left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}, \quad D = \left[f^{-1}\right]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}, \quad M = [\mathrm{id}_X]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

(senza determinare esplicitamente tali matrici).

(D) (4 punti) Determinare esplicitamente le matrici M e B.

Risposte

5. ♢

1. 5

2. $5e_1 - 3e_2$

3. Tra 1 e 4

4. $x = 22z - 4,\ y = 16z - 3$

5. $x = -1,\ x = \frac{11}{2}$

6. Sì, basta definire la 4×4 orlando I_3 con una riga e una colonna nulle

7. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 13 & 15 & -9 \\ -4 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Sempre 2

(B) Sempre 2

(C) $\begin{cases} 3x_1 - 13x_2 - 4x_3 = -27 \\ 22x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 57 \end{cases}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

(E) Disgiunti per $k = 1$, altrimenti si intersecano in un punto

2.

(A) $\mathcal{B}_j$ contiene $3 = \dim(X)$ vettori linearmente indipendenti di X

(B) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -30 & -2 & 11 \\ -19 & -1 & 7 \\ 14 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

(C) $B = MAM^{-1}$, $C = B^{-1}$, $D = A^{-1}$

(D) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -8 & -1 & 7 \\ -11 & -7 & 18 \end{pmatrix}$