



Algebra Lineare — Scritto del 30/1/12 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Dati 3 elementi linearmente indipendenti di $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leq 9}[z] : p(-i) = p''(i) = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

2. Date $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right)$, sapendo che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ trovare $[v]_{\mathcal{C}}$.

3. Data $A = (v_1 \ v_2 \ v_3) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ con $\det(A) = 1 + 2i$, calcolare $\det(v_2 - iv_3 \ 2iv_1 + v_3 \ v_1 - 2iv_2)$.

4. Calcolare la dimensione dell'immagine di $f : \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ data da $f(A) = A + 2^t A$.

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ stabilire quante sono le soluzioni di $\begin{cases} (4-k)x - 2y = k \\ (k-5)x + (k+1)y = -3. \end{cases}$

6. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.

7. Dati $X = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ e $Y = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ trovare le proiezioni di $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ su X rispetto alla decomposizione $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-k \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} -k \\ 2 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -k \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- (A) (6 punti) Per ogni k stabilire quanti tali f esistono.
 (B) (2 punti) Determinare il valore k_0 di k per il quale f esiste ed è unica ma non è iniettiva.
 (C) (4 punti) Per $k = 1$ trovare $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio affine E di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} -(1+k)x + 2ky + 2z = 1-k \\ 6x - 3ky - kz = 3. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Trovare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che E ha dimensione n_1 per $k \neq k_0$ e n_2 per $k = k_0$
 (B) (2 punti) Per $k = -2$ trovare equazioni parametriche di E .
 (C) (3 punti) Per $k = 1$ determinare la posizione di E rispetto al sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x + 2z = 13 \\ 3y + 5z = 7. \end{cases}$$

- (D) (2 punti) Per $k = k_0$ esibire una presentazione parametrica di E .
 (E) (2 punti) Per $k = k_0$ determinare la posizione di E rispetto al sottospazio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$



Risposte esatte

5. ♥

1. 5

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3. $9 - 2i$

4. 16

5. Infinite per $k = 2$, nessuna per $k = 3$, una altrimenti6. $-\frac{11}{9}$ 7. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦
