UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/12 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dati 11 generatori di $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leq 5}[z] : \ p(-i) = p''(i) = 0\}$, quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

2. Date $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, sapendo che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ trovare $[v]_{\mathcal{C}}$.

3. Data $A = (v_1 \ v_2 \ v_3) \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{C})$ con $\det(A) = 2 - i$, calcolare $\det(v_2 - iv_3 \ \ 2v_1 + iv_3 \ \ v_1 - 2iv_2)$.

4. Calcolare la dimensione dell'immagine di $f : \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ data da $f(A) = A - 2\,{}^{\mathrm{t}}\!A$.

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ stabilire quante sono le soluzioni di $\begin{cases} (3+k)x + 2ky = -2 \\ -3x + (2-k)y = 1 - 2k. \end{cases}$

6. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{1\,2}$.

7. Dati $X = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ e $Y = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ trovare le proiezione di $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ su X rispetto alla decomposizione $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/12 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} -k \\ 2 \\ 4-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ k+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1-2k \end{pmatrix}.$$

(A) (6 punti) Per ogni k stabilire quanti tali f esistono.

(B) (2 punti) Determinare il valore k_0 di k per il quale f esiste ed è unica ma non è iniettiva.

(C) (4 punti) Per $k = 2$ trovare $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio affine E di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - (1+k)y + 2kz = 1 - k \\ -kx + 6y - 3kz = 3. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che E ha dimensione n_1 per $k \neq k_0$ e n_2 per $k = k_0$

(B) (2 punti) Per $k = -2$ trovare equazioni parametriche di E.

(C) (3 punti) Per $k = 1$ determinare la posizione di E rispetto al sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 3z = 11. \end{cases}$$

(D) (2 punti) Per $k = k_0$ esibire una presentazione parametrica di E.

(E) (2 punti) Per $k = k_0$ determinare la posizione di E rispetto al sottospazio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 30/1/12 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. 7

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $6i - 7$

4. 9

5. Infinite per $k = -1$, nessuna per $k = 6$, una altrimenti

6. $\frac{9}{11}$

7. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢