



Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare $w \in \mathbb{C}$ tale che $\begin{pmatrix} 1+w & 2i-3 \\ w-2i & 1+i \end{pmatrix}$ non sia invertibile.
2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} (1-k)x + 3ky = 7-k \\ kx + (2-k)y = 3k. \end{cases}$
3. Data la decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ con $X = \text{Span}(10e_1 + 7e_2 - 3e_3, 3e_1 + 5e_2 + 2e_3)$ e $Y = \text{Span}(e_1 + 4e_2 + 2e_3)$, trovare l'associata proiezione su X di $2e_1 + 3e_2 - e_3$.
4. Per quali polinomi $q(t)$ di grado 2 a coefficienti interi si ha che $q(1 - \sqrt{2})$ è razionale?
5. Data $f : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^9$ lineare tale che $f(e_2 - ie_5) = f(2e_3 + ie_4) = e_1 + e_9$, se $\mathbb{C}^9 = W \oplus \text{Im}(f)$ che dimensione può avere W ?
6. Data la base $\mathcal{B} = \{1 + 2t + t^2, 1 - 3t - 4t^2\}$ di $X = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(-1) = 0\}$, calcolare $[5 + 2t - 3t^2]_{\mathcal{B}}$.
7. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare con $f(e_1 - 4e_2) = 2e_1 - 3e_2$ e $f(-2e_1 + 5e_2) = e_1 + e_2$, calcolare $f^{-1}(8e_1 - 7e_2)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♥ 2. ♣ 3. ◇ 4. ♠ 5. ♣ 6. ♠ 7. ◇ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♥



1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazi affini E ed F aventi rispettivamente le seguenti presentazioni parametrica e cartesiana:

$$E : \begin{cases} x_1 = -1 + 7t_1 + 5t_2 \\ x_2 = 2 + 5t_1 + 2t_2 \\ x_3 = 3 - t_1 - 3t_2 \\ x_4 = 1 + 2t_1 + t_2 \end{cases} \quad F : \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 13 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Esibire una presentazione cartesiana di E .
- (B) (3 punti) Esibire una presentazione parametrica di F .
- (C) (6 punti) Discutere la posizione reciproca di E ed F , determinando in particolare la loro somma.

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (A) (3 punti) Esibire tutti gli elementi di X aventi due componenti nulle e le altre due intere e prime tra loro, entrambe positive oppure positiva quella di indice minore e negativa quella di indice maggiore.
- (B) (2 punti) Disporre i vettori trovati in modo che sia non decrescente il valore assoluto della somma delle componenti, e a parità di valore assoluto della somma delle componenti che sia crescente la somma dei loro quadrati. Estrarre da questo sistema di vettori una base di X .
- (C) (2 punti) Calcolare il determinante di A .
- (D) (2 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione $f : X \rightarrow X$ lineare.
- (E) (3 punti) Determinare $[f]_B^B$.



Risposte esatte

6. ♠

1. $w = \frac{1}{17}(7 + 23i)$
2. Infinite per $k = -2$, nessuna per $k = \frac{1}{2}$, una altrimenti
3. $-5e_2 - 5e_3$
4. $q(t) = nt^2 + 2nt + m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$
5. Tra 5 e 8
6. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}$
7. $-e_1 - 2e_2$

1. ♥ 2. ♣ 3. ♦ 4. ♠ 5. ♣ 6. ♠ 7. ♦ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♥
