UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} kx - (k+3)y = 2k+3 \\ (1-k)x + (10-2k)y = -6. \end{cases}$

2. Data la base $\mathcal{B} = \{1 + 3t + 2t^2,\ 1 - 2t - 3t^2\}$ di $X = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t] :\ p(-1) = 0\}$, calcolare $[4 + t - 3t^2]_{\mathcal{B}}$.

3. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare con $f(e_1 + 2e_2) = 3e_1 - 2e_2$ e $f(-2e_1 + 5e_2) = 2e_1 + e_2$, calcolare $f^{-1}(5e_1 - 8e_2)$.

4. Trovare $w \in \mathbb{C}$ tale che $\begin{pmatrix} 1+w & i-4 \\ w-2i & 1+2i \end{pmatrix}$ non sia invertibile.

5. Data $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^{10}$ lineare tale che $f(e_1 - ie_2) = f(2e_3 + ie_4) = 2e_1 - e_{10}$, se $\mathbb{C}^{10} = W \oplus \mathrm{Im}(f)$ che dimensione può avere W?

6. Data la decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ con $X = \mathrm{Span}(7e_1 + 10e_2 + 3e_3,\ 5e_1 + 3e_2 - 2e_3)$ e $Y = \mathrm{Span}(4e_1 + e_2 - 2e_3)$, trovare l'associata proiezione su X di $3e_1 + 2e_2 + e_3$.

7. Per quali polinomi $p(x)$ di grado 2 a coefficienti interi si ha che $p\left(1 + \sqrt{2}\right)$ è razionale?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♢ 4. ♠ 5. ♣ 6. ♡ 7. ♢ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♡

Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazi affini E ed F aventi rispettivamente le seguenti presentazioni parametrica e cartesiana:

$$E : \begin{cases} x_1 = -1 + 2t_1 + t_2 \\ x_2 = 3 + 5t_1 + 2t_2 \\ x_3 = 2 - t_1 - 3t_2 \\ x_4 = 1 + 7t_1 + 5t_2 \end{cases} \qquad F : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Esibire una presentazione cartesiana di E.

(B) (3 punti) Esibire una presentazione parametrica di F.

(C) (6 punti) Discutere la posizione reciproca di E ed F, determinando in particolare la loro somma.

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Esibire tutti gli elementi di X aventi due componenti nulle e le altre due intere e prime tra loro, entrambe positive oppure positiva quella di indice minore e negativa quella di indice maggiore.

(B) (2 punti) Disporre i vettori trovati in modo che sia non decrescente la somma delle componenti, e a parità di somma delle componenti che sia crescente la somma dei loro quadrati. Estrarre da questo sistema di vettori una base di X.

(C) (2 punti) Calcolare il determinante di A.

(D) (2 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione $f : X \to X$ lineare.

(E) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Quesiti

Risposte esatte

6. ♡

1. Infinite per $k = 3$, nessuna per $k = -\frac{1}{3}$, una altrimenti

2. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

3. $7e_1 - 4e_2$

4. $w = \frac{1}{26}(11 + 29i)$

5. Tra 7 e 9

6. $-5e_1 + 5e_3$

7. $p(x) = nx^2 - 2nx + m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$

1. ♡ 2. ♣ 3. ♢ 4. ♠ 5. ♣ 6. ♡ 7. ♢ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♡