



Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Data $f : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^9$ lineare tale che $f(e_2 - ie_5) = f(2e_3 + ie_4) = e_1 + e_9$,
se $\mathbb{C}^9 = W \oplus \text{Im}(f)$ che dimensione può avere W ?

2. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare con $f(e_1 + 2e_2) = 3e_1 - 2e_2$ e $f(-2e_1 + 5e_2) = 2e_1 + e_2$,
calcolare $f^{-1}(5e_1 - 8e_2)$.

3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} kx - (k+3)y = 2k+3 \\ (1-k)x + (10-2k)y = -6. \end{cases}$

4. Per quali polinomi $p(x)$ di grado 2 a coefficienti interi si ha che $p(1 + \sqrt{2})$ è razionale?

5. Data la base $\mathcal{B} = \{1 + 3t + 2t^2, 1 - 2t - 3t^2\}$ di $X = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(-1) = 0\}$,
calcolare $[4 + t - 3t^2]_{\mathcal{B}}$.

6. Data la decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ con $X = \text{Span}(7e_1 + 10e_2 + 3e_3, 5e_1 + 3e_2 - 2e_3)$ e
 $Y = \text{Span}(4e_1 + e_2 - 2e_3)$, trovare l'associata proiezione su X di $3e_1 + 2e_2 + e_3$.

7. Trovare $w \in \mathbb{C}$ tale che $\begin{pmatrix} 1+w & i-4 \\ w-2i & 1+2i \end{pmatrix}$ non sia invertibile.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♥ 2. ♣ 3. ◇ 4. ♠ 5. ♣ 6. ♣ 7. ◇ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♥



1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (A) (3 punti) Esibire tutti gli elementi di X aventi due componenti nulle e le altre due intere e prime tra loro, entrambe positive oppure positiva quella di indice minore e negativa quella di indice maggiore.
- (B) (2 punti) Disporre i vettori trovati in modo che sia non decrescente la somma delle componenti, e a parità di somma delle componenti che sia crescente la somma dei loro quadrati. Estrarre da questo sistema di vettori una base di X .
- (C) (2 punti) Calcolare il determinante di A .
- (D) (2 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione $f : X \rightarrow X$ lineare.
- (E) (3 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazi affini E ed F aventi rispettivamente le seguenti presentazioni parametrica e cartesiana:

$$E : \begin{cases} x_1 = -1 + 2t_1 + t_2 \\ x_2 = 3 + 5t_1 + 2t_2 \\ x_3 = 2 - t_1 - 3t_2 \\ x_4 = 1 + 7t_1 + 5t_2 \end{cases} \quad F : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Esibire una presentazione cartesiana di E .
- (B) (3 punti) Esibire una presentazione parametrica di F .
- (C) (6 punti) Discutere la posizione reciproca di E ed F , determinando in particolare la loro somma.



Risposte esatte

6. ♣

1. Tra 5 e 8
2. $7e_1 - 4e_2$
3. Infinite per $k = 3$, nessuna per $k = -\frac{1}{3}$, una altrimenti
4. $p(x) = nx^2 - 2nx + m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$
5. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$
6. $-5e_1 + 5e_3$
7. $w = \frac{1}{26}(11 + 29i)$

1. ♥ 2. ♣ 3. ◇ 4. ♠ 5. ♣ 6. ♣ 7. ◇ 8. ♠ 9. ♠ 10. ♥
