UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare con $f(e_1 - 4e_2) = 2e_1 - 3e_2$ e $f(-2e_1 + 5e_2) = e_1 + e_2$, calcolare $f^{-1}(8e_1 - 7e_2)$.

2. Data la base $\mathcal{B} = \{1 + 3t + 2t^2,\ 1 - 2t - 3t^2\}$ di $X = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t] :\ p(-1) = 0\}$, calcolare $[4 + t - 3t^2]_{\mathcal{B}}$.

3. Trovare $w \in \mathbb{C}$ tale che $\begin{pmatrix} 1+w & i-4 \\ w-2i & 1+2i \end{pmatrix}$ non sia invertibile.

4. Data $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^{10}$ lineare tale che $f(e_1 - ie_2) = f(2e_3 + ie_4) = 2e_1 - e_{10}$, se $\mathbb{C}^{10} = W \oplus \mathrm{Im}(f)$ che dimensione può avere W?

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} kx - (k+3)y = 2k+3 \\ (1-k)x + (10-2k)y = -6. \end{cases}$

6. Per quali polinomi $q(t)$ di grado 2 a coefficienti interi si ha che $q\left(1 - \sqrt{2}\right)$ è razionale?

7. Data la decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ con $X = \mathrm{Span}(10e_1 + 7e_2 - 3e_3,\ 3e_1 + 5e_2 + 2e_3)$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + 4e_2 + 2e_3)$, trovare l'associata proiezione su X di $2e_1 + 3e_2 - e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Esercizî

1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Esibire tutti gli elementi di X aventi due componenti nulle e le altre due intere e prime tra loro, entrambe positive oppure positiva quella di indice minore e negativa quella di indice maggiore.

(B) (2 punti) Disporre i vettori trovati in modo che sia non decrescente il valore assoluto della somma delle componenti, e a parità di valore assoluto della somma delle componenti che sia crescente la somma dei loro quadrati. Estrarre da questo sistema di vettori una base di X.

(C) (2 punti) Calcolare il determinante di A.

(D) (2 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione $f : X \to X$ lineare.

(E) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazi affini E ed F aventi rispettivamente le seguenti presentazioni parametrica e cartesiana:

$$E : \begin{cases} x_1 = -1 + 7t_1 + 5t_2 \\ x_2 = 2 + 5t_1 + 2t_2 \\ x_3 = 3 - t_1 - 3t_2 \\ x_4 = 1 + 2t_1 + t_2 \end{cases} \qquad F : \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 13 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Esibire una presentazione cartesiana di E.

(B) (3 punti) Esibire una presentazione parametrica di F.

(C) (6 punti) Discutere la posizione reciproca di E ed F, determinando in particolare la loro somma.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $-e_1 - 2e_2$

2. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

3. $w = \frac{1}{26}(11 + 29i)$

4. Tra 7 e 9

5. Infinite per $k = 3$, nessuna per $k = -\frac{1}{3}$, una altrimenti

6. $q(t) = nt^2 + 2nt + m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$

7. $-5e_2 - 5e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢