UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

**1.** Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare con $f(e_1 + 2e_2) = 3e_1 - 2e_2$ e $f(-2e_1 + 5e_2) = 2e_1 + e_2$, calcolare $f^{-1}(5e_1 - 8e_2)$.

**2.** Data la base $\mathcal{B} = \{1 + 2t + t^2,\ 1 - 3t - 4t^2\}$ di $X = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t] :\ p(-1) = 0\}$, calcolare $[5 + 2t - 3t^2]_{\mathcal{B}}$.

**3.** Trovare $w \in \mathbb{C}$ tale che $\begin{pmatrix} 1+w & 2i-3 \\ w-2i & 1+i \end{pmatrix}$ non sia invertibile.

**4.** Data $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^9$ lineare tale che $f(e_2 - ie_5) = f(2e_3 + ie_4) = e_1 + e_9$, se $\mathbb{C}^9 = W \oplus \mathrm{Im}(f)$ che dimensione può avere $W$?

**5.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} (1-k)x + 3ky = 7 - k \\ kx + (2-k)y = 3k. \end{cases}$

**6.** Per quali polinomi $p(x)$ di grado 2 a coefficienti interi si ha che $p\left(1 + \sqrt{2}\right)$ è razionale?

**7.** Data la decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ con $X = \mathrm{Span}(7e_1 + 10e_2 + 3e_3,\ 5e_1 + 3e_2 - 2e_3)$ e $Y = \mathrm{Span}(4e_1 + e_2 - 2e_3)$, trovare l'associata proiezione su $X$ di $3e_1 + 2e_2 + e_3$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Esercizî

**1.** Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0\}$ e $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Esibire tutti gli elementi di $X$ aventi due componenti nulle e le altre due intere e prime tra loro, entrambe positive oppure positiva quella di indice minore e negativa quella di indice maggiore.

(B) (2 punti) Disporre i vettori trovati in modo che sia non decrescente la somma delle componenti, e a parità di somma delle componenti che sia crescente la somma dei loro quadrati. Estrarre da questo sistema di vettori una base di $X$.

(C) (2 punti) Calcolare il determinante di $A$.

(D) (2 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione $f : X \to X$ lineare.

(E) (3 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

**2.** In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazi affini $E$ ed $F$ aventi rispettivamente le seguenti presentazioni parametrica e cartesiana:

$$E : \begin{cases} x_1 = -1 + 2t_1 + t_2 \\ x_2 = 3 + 5t_1 + 2t_2 \\ x_3 = 2 - t_1 - 3t_2 \\ x_4 = 1 + 7t_1 + 5t_2 \end{cases} \qquad F : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Esibire una presentazione cartesiana di $E$.

(B) (3 punti) Esibire una presentazione parametrica di $F$.

(C) (6 punti) Discutere la posizione reciproca di $E$ ed $F$, determinando in particolare la loro somma.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Algebra Lineare — Scritto del 13/2/12 — Quesiti

# Risposte esatte

## 5. ♢

**1.** $7e_1 - 4e_2$

**2.** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}$

**3.** $w = \frac{1}{17}(7 + 23i)$

**4.** Tra 5 e 8

**5.** Infinite per $k = -2$, nessuna per $k = \frac{1}{2}$, una altrimenti

**6.** $p(x) = nx^2 - 2nx + m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$

**7.** $-5e_1 + 5e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢