UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 10/1/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dati 4 vettori linearmente indipendenti in $\{x \in \mathbb{R}^7 : \ 3x_1 + x_7 = 5x_2 + 8x_4\}$,
quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

2. In $\mathbb{R}^2$, data $\mathcal{B} = (2e_1 + 3e_2, -5e_1 + e_2)$ calcolare $[-22e_1 + e_2]_{\mathcal{B}}$.

3. Se $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^6$ è lineare, $f(2e_1 - ie_2) = f(e_2 - ie_4) = 3e_1 + ie_6$,
$W \subset \mathbb{C}^6$ e $\mathbb{C}^6 = W \oplus \mathrm{Im}(f)$, che dimensione può avere W?

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ t+2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 1-2t \end{pmatrix}$ è invertibile.

5. Risolvere $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 9 \\ -4x + 2y + 5z = -7 \\ 5x + 5y - 7z = 17. \end{cases}$

6. Date $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ calcolare i determinanti delle orlate di B in A.

7. Data $X \oplus Y = \mathbb{R}^3$ con $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 + 3e_2 - e_3)$
calcolare la proiezione su X di $3e_1 + 7e_2$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 10/1/12 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 4t \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che per $t = 3$ la A è invertibile e trovare A^{-1}.

(B) (3 punti) Determinare $t_1 < t_2$ tali che A è invertibile per ogni $t \neq t_1$ e $t \neq t_2$.

(C) (3 punti) Per $t = t_1$ trovare equazioni parametriche per $X = \mathrm{Ker}\,(f_A)$ e cartesiane per $Y = \mathrm{Im}\,(f_A)$.

(D) (3 punti) Provare che $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ e determinare la matrice della proiezione su Y associata a questa decomposizione.

2. Considerare $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ e $V = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Trovare tutti i $t \in \mathbb{R}$ tali che $U + tV$ ha nucleo non banale e corrispondentemente determinare equazioni parametriche per tale nucleo.

(B) (4 punti) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generato da U e V.

(C) (4 punti) Interpretando le colonne di V come base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ e posto $f(x) = U \cdot x$ calcolare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. ♡

1. 2

2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Tra 3 e 5

4. $t \neq -3$ e $t \neq 15$

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

6. -34 e -2

7. $-e_1 + e_2 + 2e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢