UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 10/1/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dati 11 generatori di $\{x \in \mathbb{R}^7 : \; 3x_1 + x_7 = 5x_2 + 8x_4\}$,
quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

2. In $\mathbb{R}^2$, data $\mathcal{B} = (3e_1 + 2e_2, -e_1 + 5e_2)$ calcolare $[3e_1 + 19e_2]_{\mathcal{B}}$.

3. Se $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^7$ è lineare, $f(e_1 + ie_2) = f(e_2 - ie_3) = 2e_1 + ie_7$,
$W \subset \mathbb{C}^7$ e $\mathbb{C}^7 = W \oplus \mathrm{Im}(f)$, che dimensione può avere W?

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2t \\ 3 & t+1 & 7 \end{pmatrix}$ è invertibile.

5. Risolvere $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ -4x + 5y + 2z = 3 \\ 5x - 7y + 5z = 3. \end{cases}$

6. Date $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ calcolare i determinanti delle orlate di B in A.

7. Data $X \oplus Y = \mathbb{R}^3$ con $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 + 3e_3)$
calcolare la proiezione su X di $3e_1 + 7e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 10/1/12 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & -13 \\ 2 & -3 & 4t \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che per $t = -1$ la A è invertibile e trovare A^{-1}.

(B) (3 punti) Determinare $t_1 < t_2$ tali che A è invertibile per ogni $t \neq t_1$ e $t \neq t_2$.

(C) (3 punti) Per $t = t_2$ trovare equazioni parametriche per $X = \mathrm{Ker}\,(f_A)$ e cartesiane per $Y = \mathrm{Im}\,(f_A)$.

(D) (3 punti) Provare che $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ e determinare la matrice della proiezione su Y associata a questa decomposizione.

2. Considerare $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e $V = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Trovare tutti i $t \in \mathbb{R}$ tali che $U + tV$ ha nucleo non banale e corrispondentemente determinare equazioni parametriche per tale nucleo.

(B) (4 punti) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generato da U e V.

(C) (4 punti) Interpretando le colonne di V come base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ e posto $f(x) = U \cdot x$ calcolare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. 5

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Tra 5 e 6

4. $t \neq -2$ e $t \neq \frac{7}{4}$

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. -32 e -4

7. $-e_1 + 2e_2 + e_3$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$