

Pavimentazioni del piano

$G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ è un sottogruppo se:

- $\text{id} \in G$
- $g \in G \Rightarrow g^{-1} \in G$
- $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \circ g_2 \in G$

(cioè se con le operazioni di gruppo di $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ non si esce da G).

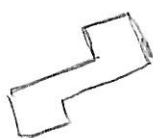
Vogliamo formalizzare la seguente nozione intuitiva:

“una pavimentazione del piano è un suo ricoprimento tramite piastrelle tutte congruenti tra loro e disposte nel piano con regolarità”

Oss: per congruenti intendiamo che si ottengono l'una dall'altra tramite una isometria, la quale può anche invertire l'orientazione; dunque le piastrelle non hanno il sopra e il sotto, possono essere appoggiate sul piano da entrambi i lati:



appoggiata da
un lato

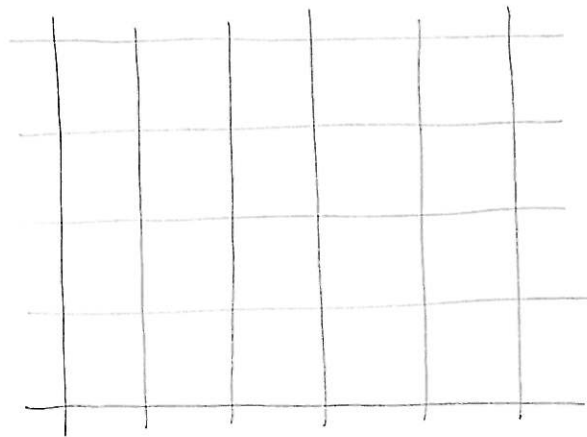


appoggiata
dall'altro

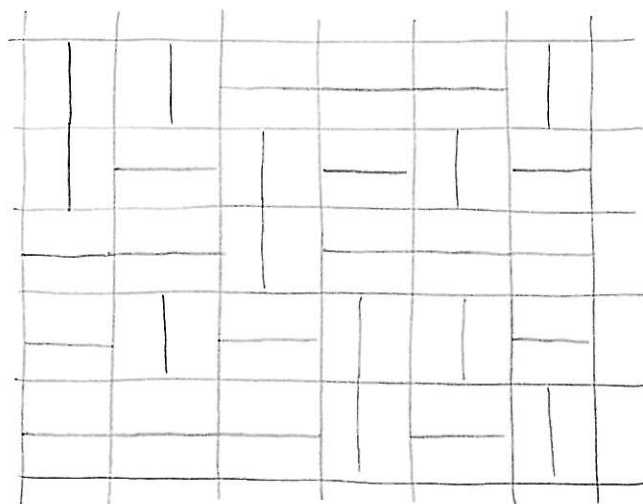
La richiesta di "regolarità" è la meno esplicita ed evidente, ma serve ad esempio a evitare situazioni di questi due tipi:

1) Paviementazioni di $\mathbb{R}^2$ con rettangoli 1×2 ottenuta così:

- Partire dalle pavimentazione più facile con quadrati 2×2

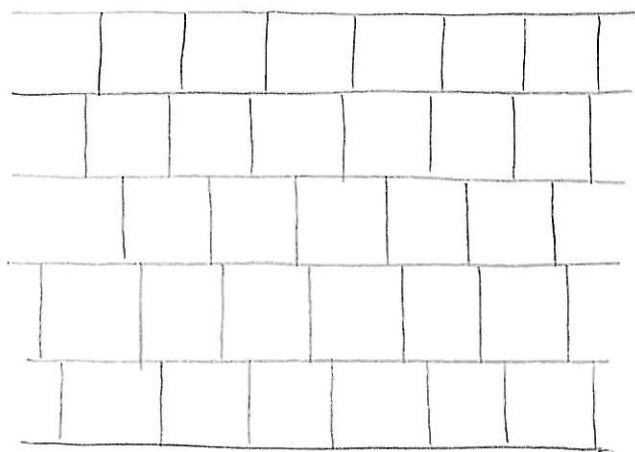


- dividere a metà ciascuno di questi quadrati in modo "casuale"



2) Pavimentazione con quadrati 1×1 ottenuta con:

- partire da quelle più facile
- traslare orizzontalmente "a caso" le strisce orizzontali:



Queste non sono "regolari" perché disegnarne una porzione finita (il che, su un foglio finito, è abbastanza inevitabile) non si può immaginare come proseguano all'infinito.

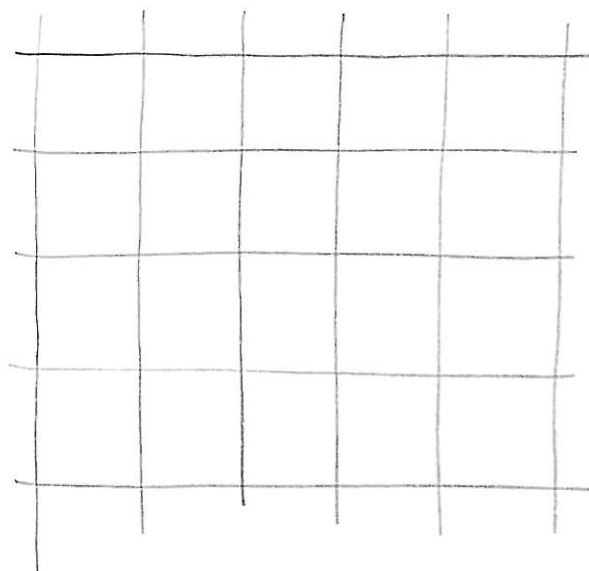
La formalizzazione di questa idea di regolarità usa la nozione introdotta all'inizio:

Def: se $P \subset \mathbb{E}^2$ è un poligono e $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ è un sottogruppo, dico che G definisce una pavimentazione di $\mathbb{R}^2$ con piastrella base P se:

- 1) $\{g(P) : g \in G\}$ copre $\mathbb{R}^2$
- 2) Se $g_1, g_2 \in G$ e $g_1 \neq g_2$ allora $g_1(P) \cap g_2(P)$ è vuoto oppure un vertice comune oppure un lato comune.

Osservazione : quello che conta realmente per la "figura" della pavimentazione è G , non P , la quale spesso può essere cambiata senza cambiare G . Anzi talvolta cambiando P , cioè cambiando la sua forma o aggiungendo una "deconnessione", si possono vedere simmetrie della pavimentazione che prima non si vedevano.

Facciamo due esempi importanti. La pavimentazione facile con quadrati 1×1 certamente è "regolare" :



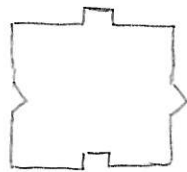
Ma : da quale gruppo viene ?

Prima possibilità :

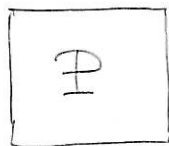
$$G = \left\{ T_{\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}} : m, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

In questo caso per vedere meglio "come" le
piastrelle base viene portate in giro da G
a coprire $\mathbb{E}^2$ posso

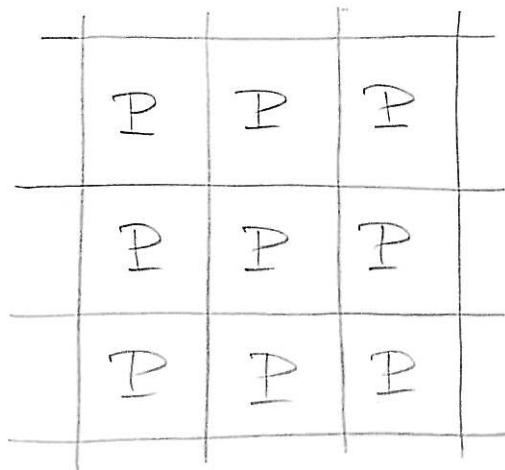
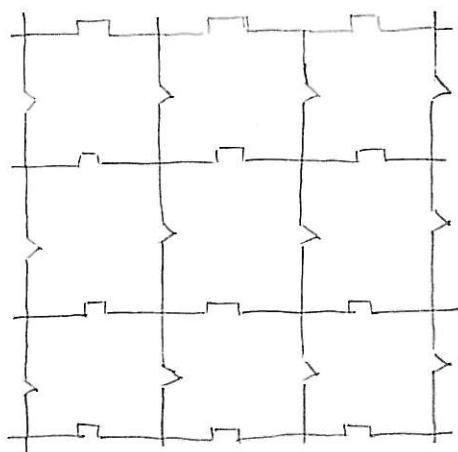
cambiarne forma :



decorarla :



e ottengo :



Seconda possibilità:

G "generato" dalle riflessioni rispetto alle rette che contengono i lati di P

$$= \{id\} \cup \{\sigma_{\{x=m\}} : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\sigma_{\{y=m\}} : m \in \mathbb{Z}\} \\ \cup \{\tau_{\begin{pmatrix} 2m \\ 0 \end{pmatrix}} : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\tau_{\begin{pmatrix} 0 \\ 2m \end{pmatrix}} : m \in \mathbb{Z}\} \\ \cup \{\rho_{\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}, \pi} : m, m \in \mathbb{Z}\} \cup \dots$$

e in questo caso decorando con $\boxed{P}$ o tipo

P	Q	P	Q	P
B	D	B	D	B
P	Q	P	Q	P
B	D	B	D	B

da cui vedo le simmetrie che prima non vedevo.

_____ o _____

Cerchiamo ora di capire quali possono essere i gruppi $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ che intervengono nelle pavimentazioni di $\mathbb{E}^2$.

Abbiamo intanto il :

Lemma : se (G, P) danno una pavimentazione di $\mathbb{E}^2$ allora le piastrelle della pavimentazione sono in corrispondenza biunivoca con G .

Dim : A $g \in G$ faccio corrispondere la piastrella $g(P)$.

Se $g_1 \neq g_2$ poiché $g_1(P) \cap g_2(P)$ è un lato o un vertice o vuoto ho $g_1(P) \neq g_2(P)$. $\square$

$\otimes$ allegato

Dato $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ e $A \in \mathbb{E}^2$ pongo ora

$$G_A = \{g \in G : g(A) = A\}.$$

Prop : se G è un sottogruppo di $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$

allora lo è anche G_A ; inoltre se G interviene in qualche pavimentazione di $\mathbb{E}^2$ insieme a una piastrella P allora G_A è finito, e più precisamente :

(1) Se A è interno a qualche piastrella allora $G_A = \{\text{id}\}$

(2) Se A è su un lato di qualche piastrella ma non è il punto medio allora $G = \{\text{id}\}$ oppure $G = \{\text{id}, \sigma_l\}$ dove l è la retta che contiene il lato



Prop: se G è un gruppo di una pavimentazione
allora G è discreto, cioè non può esistere
 $A \in \mathbb{E}^2$, $\{g_m\}_{m=0}^{+\infty} \subset G$ fatta di elementi
distinti tali che $g_m(A) \rightarrow B \in \mathbb{E}^2$.

Dimo: vicino a B c'è un numero finito di
piastrelle, mentre $\{g_m(P)\}_{m=0}^{+\infty}$ sono tutte
distinte se $P \ni A$ è una piastrella. $\square$

(3) Se A è il punto medio di un lato di qualche piastrella allora $G_A = \{id\}$ oppure $G' = \{id, \sigma_l\}$ oppure $G = \{id, \rho_{A,\pi}\}$.

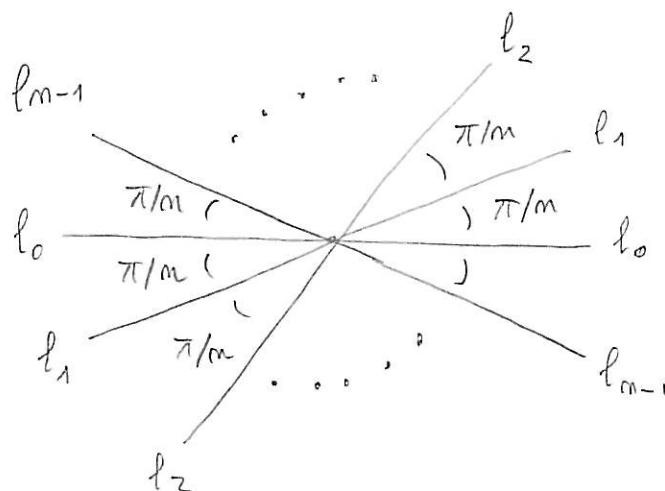
(4) Se A è un vertice di qualche piastrella allora G_A è di uno dei due tipi seguenti:

$$\bullet G_{A,m} = \left\{ \rho_{A, 2\pi \frac{j}{m}} : j=0, \dots, m-1 \right\}$$

per qualche $m \in \mathbb{N}$ non nullo

$$\bullet D_{A,m} = \left\{ \rho_{A, 2\pi \frac{j}{m}} : j=0, \dots, m-1 \right\} \cup \left\{ \sigma_{l_j} : j=0, \dots, m-1 \right\}$$

per qualche $m \in \mathbb{N}$ non nullo, dove $l_0, \dots, l_{m-1}$ sono rette per A che formano ognuna un angolo $\frac{\pi}{m}$ con la successiva:

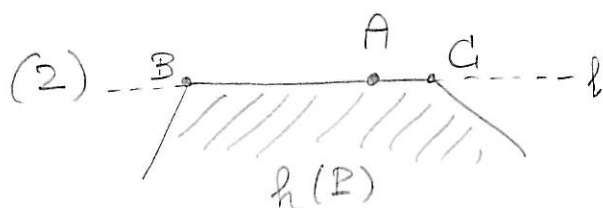


Osservazioni:

- (1) $G_{A,m}$ ha m elementi, dunque $G_{A,1} = \{id\}$
- (2) $D_{A,2m}$ ha $2m$ elementi, e $D_{A,1} = \{id, \sigma_A\}$
- (3) $D_{A,2m}$ dipende in qualche modo anche da h , non solo da A e m , ma in modo influente (ci torneremo).

Dici: la prima affermazione è facile. Per la seconda esaminiamo i casi (1)-(4).

- (1) Se A è interno a una piastrella $h(P)$ e $g \in G_A$ allora $g(A)$ è interno alla piastrella $(g \circ h)(P)$, ma $g(A) = A$, dunque è interno anche a $h(P)$; piastrelle distinte non si incontrano in punti interni, dunque $(g \circ h)(P) = h(P)$, ma allora $g \circ h = h$ per il lemma di pag. 7, dunque $g = id$.



Ragionando come sopra vedo che se $g \in G_A$ allora $(g \circ h)(P)$ o è $h(P)$, nel

quel caso $g = id$, o è la piastrella della pavimentazione diversa da $h(P)$ e avente lato BC .

Le uniche isometrie di $\mathbb{E}^2$ che fissano A e mandano uno nell'altro i due semipiani delimitati da ℓ sono σ_ℓ e $\rho_{A,\pi}$, ma se A non è il punto medio di BC nel secondo caso non posso avere che $g(h(\mathbb{P}))$ ha anch'essa lato BC .

- (3) Come sopra, solo due ore fu $g \in G_A$ e $g \neq \text{id}$ posso avere anche $g = \sigma_{A,\pi}$; ma non posso avere sia σ_ℓ sia $\rho_{A,\pi}$ altrimenti avrei
 $(\rho_{A,\pi} \circ h)(\mathbb{P})$ e $(\sigma_\ell \circ h)(\mathbb{P})$
 sarebbero tegole diverse ($g_1(\mathbb{P})$ e $g_2(\mathbb{P})$ con $g_1 \neq g_2$)
 con punti interni in comune.

Osservazione intermedia: come visto in questi argomenti, scegliere come piastrina base $\mathbb{P}$ oppure qualsiasi altro $h(\mathbb{P})$ è la stessa cosa -

- (4) Supponiamo allora che A sia un vertice di $\mathbb{P}$.
 Se $\mathbb{P}$ ha angolo α in A allora

$$\{g(\mathbb{P}) : g \in G_A\}$$

sono piastrine distinte della pavimentazione, dunque paivi di punti interni comuni, tutte con

angolo α in A . Ne segue che G_A ha al più $\frac{2\pi}{\alpha}$ elementi, cioè $\bar{e}$ è finito. Distinguiamo ora due casi:

(4a) G_A contiene solo rotazioni intorno ad A

(4b) G_A contiene riflessioni.

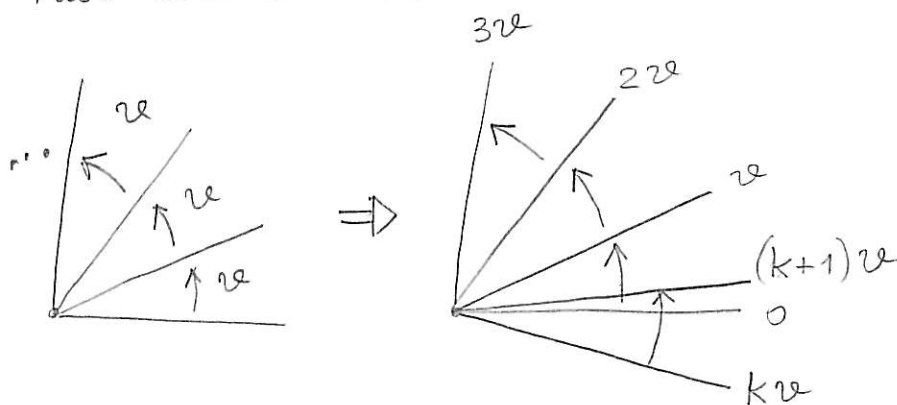
(4a) Abbiamo $G_A = \{id\}$, cioè $G_A = G_{A,1}$,

oppure possiamo prendere ϑ tale che $\rho_{A,\vartheta}$ è la rotazione di angolo minimo che sta in G_A .

Affermo intanto che $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

per farlo esaminiamo $2\vartheta, 3\vartheta, 4\vartheta, \dots$; se non trova 2π

vuol dire che trova k con $k\vartheta < 2\pi < (k+1)\vartheta$:



il che è assurdo perché $\rho_{A,(k+1)\vartheta} = \rho_{A,\vartheta}^{k+1}$

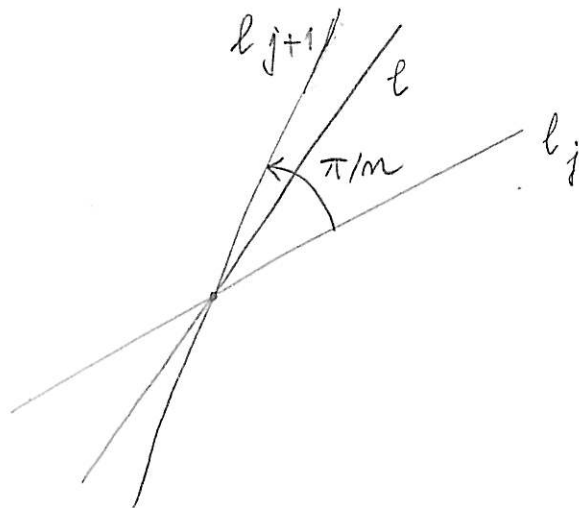
appartiene a G_A ed è una rotazione di angolo minore di ϑ : assurdo.

Affermo ora che $G_A = C_{A,m}$, il che conclude il caso (4a). In caso contrario ho che G_A contiene $\rho_{A,\varphi}$ con $h\nu < \varphi < (h+1)\nu$, ma allora $\rho_{A,\nu}^{h+1} = \rho_{A,-\varphi}$ appartiene a G_A ed è una rotazione di angolo minore di ν : assurdo.

(4b) Se G_A non è solo $\{id, \sigma_\ell\}$, cioè $D_{A,1}$, allora contiene una rotazione (se contiene un'altra $\sigma_{\ell'}$ contiene la rotazione $\sigma_{\ell'} \circ \sigma_\ell$).

Chiamo ν il minimo angolo di rotazione per un elemento di A . Lo stesso argomento di sopra mostra che $\nu = \frac{2\pi}{n}$ e che tutte le rotazioni contenute in G_A sono del tipo $2\pi \frac{j}{n}$.

Pongo ora $\ell_0 = \ell$ e definisco $\ell_1, \dots, \ell_{m-1}$ che formino angoli $\frac{\pi}{n}$. So che $\sigma_{\ell_0} \circ \sigma_{\ell_1} = \rho_{A,\nu}$, dunque $\sigma_{\ell_1} \in G_A$, e analogamente $\rho_{\ell_j} \in G_A$ $j=0, \dots, m-1$. Se G_A contenesse σ_ℓ con $\ell \neq \ell_0, \dots, \ell_{m-1}$ avrei



$\Rightarrow \sigma_l \circ \sigma_{l_j}$ è una rotazione di angolo minore di $\varphi = \frac{2\pi}{m}$: assurdo. $\square$

⊗ allegato

Prop: Se $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ è il gruppo di una pavimentazione con piastrelle base P allora posto

$$T = \{g \in G : g \text{ traslazione}\}$$

esistono v_1, v_2 vettori con direzioni distinte tali che

$$T = \{T_{m_1 v_1 + m_2 v_2} : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Dim: Affermo dapprima che G contiene T_{v_1} e T_{v_2} non parallele.

Ciò è chiaro se G contiene solo traslazioni.

Altrimenti consideriamo dapprima il caso in cui

G contiene una rotazione $S_{A_0, \varphi}$. So già che

A_0 è vertice o punto medio di un lato di

⊗

Osservazione : nel caso (4) potevo usare solo che G è discreto, e i casi (1)-(3) sono casi particolari di (4), infatti:

$$\{id\} = C_1, \quad \{id, \sigma_2\} = D_1, \quad \{id, \rho_{A, \pi}\} = C_2.$$

Dunque ho dimostrato:

$$G \text{ discreto} \Rightarrow G_A = C_m \circ D_n \quad \forall A \in \mathbb{E}^2.$$

Usando tutta l'ipotesi ho invece:

Teo : G gruppo di pavimentazione

$$\Rightarrow G_A = C_n \circ D_n \text{ con } n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Dimo : basta vedere che $\rho_{A, \frac{2\pi}{n}} \in G_A$ con $n \geq 2$ implica $n \leq 6$ e $n \neq 5$.

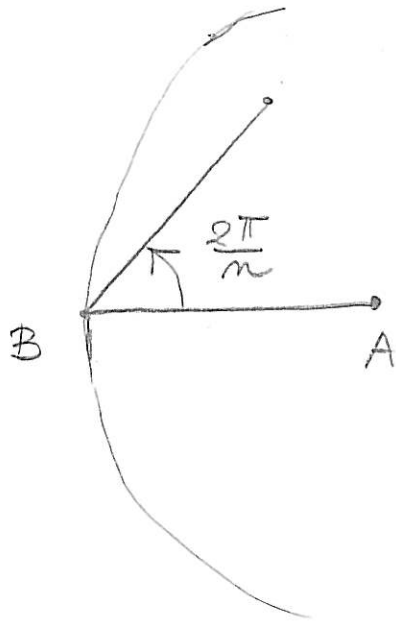
Poiché $A \in \mathbb{P}$ piastrella e $\mathbb{P}$ è finita,

ho che $\{g(A) : g \in G, g \notin G_A\}$ è non vuoto. Prendo B in questo insieme che

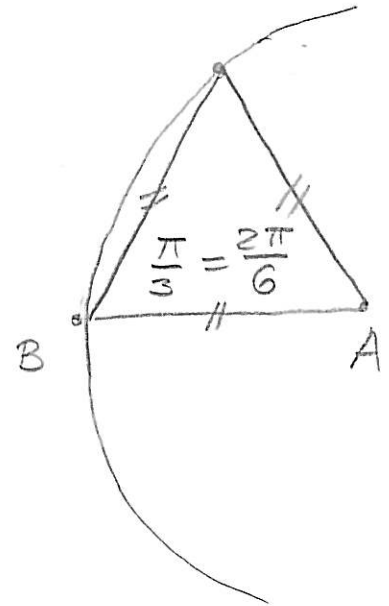
rende minima $\overline{AB}$, che esiste perché G è discreto. Se $B = g(A)$ ho $g \circ \rho_{A, \frac{2\pi}{n}} \circ g^{-1} =$

$$= \rho_{B, \pm \frac{2\pi}{n}}, \text{ dunque } \rho_{B, \frac{2\pi}{n}} \in G_B.$$

Se $m \geq 7$ ho $\overline{A p_{B, \frac{2\pi}{m}}(A)} < \overline{AB}$!



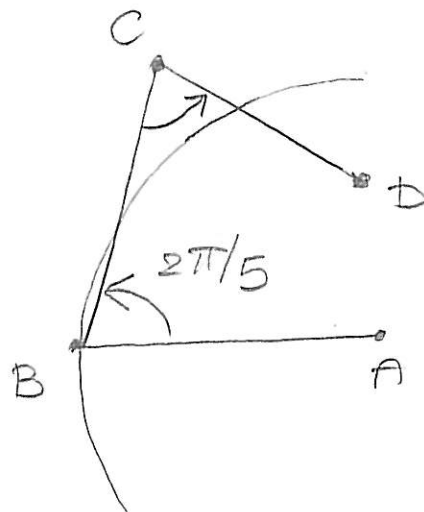
infatti



Ma anche $m = 5$ contraddice la minimalità di B:

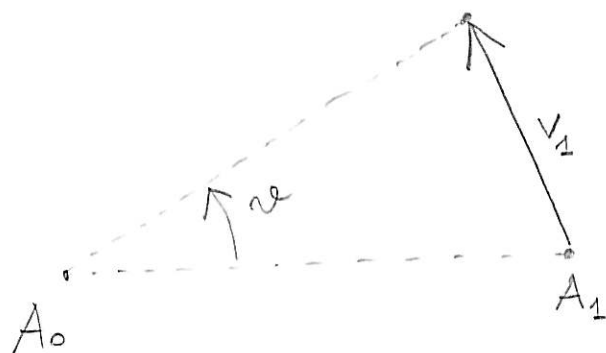
$$C = p_{B, \frac{2\pi}{5}}(A)$$

$$D = p_{C, \frac{2\pi}{5}}(B)$$



qualche piastrella P_0 . Prendo P_1 piastrella
disgiunta da P_0 e $g_1 \in G$ tale che $P_1 = g_1(P_0)$.

Posto $A_1 = g_1(A_0)$ ho che $g_1 \circ S_{A_0, v} \circ g_1^{-1}$ appartiene
a G ed è $S_{A_1, v}$ oppure $S_{A_1, -v}$ (a seconda che
 g_1 conservi o inverta l'orientazione). Ma G
contiene gli inversi dei suoi elementi, dunque $S_{A_1, -v} \in G$,
dunque $S_{A_0, v} \circ S_{A_1, -v} \in G$, che è T_{v_1} con



Basta ora ripetere il ragionamento con una
 $P_2 = g_2(P_0)$ tale che se $A_2 = g_2(A_0)$ si abbia
che A_0A_2 è in una direzione diversa rispetto
ad A_0A_1 , e certamente c'è.

Se G non contiene rotazioni ma una
glissoriflessione $\sigma_{l, w}$ allora contiene
 T_{v_1} con $v_1 = 2w$. Prese piastrelle P_1 e P_2
dalla stessa parte di l ma a
distanze diverse da l , se $P_2 = g(P_1)$

ci sono questi casi:

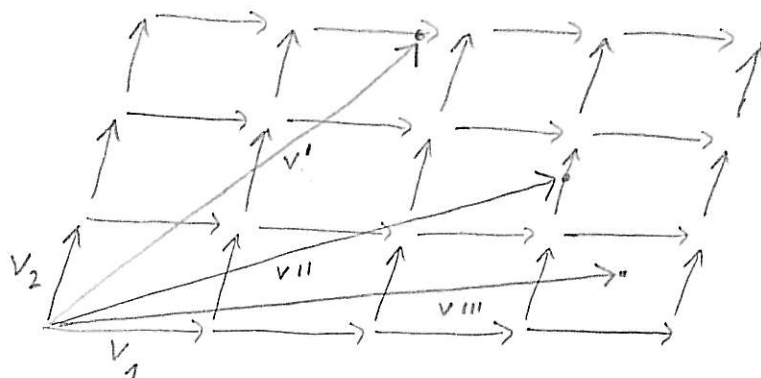
- se g è una traslazione allora $g = T_{v_2}$ con v_2 indipendente da v_1
- se g è una (gliss)riflessione con asse non parallelo a l allora $g \circ \sigma_{l,w}$ è una rotazione o una traslazione indipendente da T_{v_1}
- se nessuna delle precedenti accade, G contiene solo (gliss)riflessioni con asse parallelo a l e traslazioni parallele a l , il che è impossibile.

Se G non contiene né rotazioni né glissriflessioni allora tutti gli assi di riflessione di G sono paralleli tra loro e si vede facilmente che G contiene T_{v_1} e T_{v_2} .

Resta da vedere che si possono scegliere v_1 e v_2 in modo che $T = \{ T_{m_1 v_1 + m_2 v_2} : m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \}$.

Per farlo noto che T non può contenere T_v con v arbitrariamente corto (perché G è discreto) dunque prendo v_1 tale che T_{v_1} sia una delle traslazioni di lunghezza minima in T (è un minimo e non un inf. per le stesse ragioni).
solo

Poi prendo v_2 tale che $T_{v_2} \in T$ sia una delle traslazioni di lunghezza minima non parallela a v_1 (anch'essa esiste, con ragionamento analogo). Ora se T contenesse T_v con v non del tipo $T_{m_1 v_1 + m_2 v_2}$ avrei



v' contraddice la minimalità di v_1 ;

v'', v''' quelle di v_2 .

